（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2006～2007学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称： 高等代数I **课程序号：** MATH120011

开课院系： 数学科学学院 **考试形式：** 闭卷

姓　名： ________ **学　号：** ________ **专　业：** ________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									
题　号	9	10	11	12	13	14	15	16	
得　分									

一、选择题(每题2分，共16分)

1. 设 V_1 和 V_2 分别是 $\mathbb{R}^7$ 中的 4 维和 5 维子空间，则 $V_1\bigcap V_2$ 可能的最小维数是 ________.

   (A). 1;　(B). 2;　(C). 3;　(D). 4.

2. 设 A 是 n 阶方阵 $(n\geq 3)$, A^* 是其伴随矩阵，则 $(3A)^*=$ ________.

   (A). $3A^*$;　(B). $3^{n-1}A^*$;　(C). 3^nA^*;　(D). $3^{-n}A^*$.

3. 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵， B 是 $n\times m$ 阶矩阵， 则 ________.

   (A). 当 $m>n$ 时， 必有行列式 $|AB|\neq 0$;

   (B). 当 $m>n$ 时， 必有行列式 $|AB|=0$;

   (C). 当 $n>m$ 时， 必有行列式 $|AB|=0$;

   (D). 当 $n>m$ 时， 必有行列式 $|AB|\neq 0$.

4. 设向量 β 可由向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 线性表出，但不可由向量组 $I=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}\}$ 线性表出。记向量组 $II=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1},\beta\}$, 则_________.

(A). α_m 可由 I 线性表出，也可由 II 线性表出；

(B). α_m 可由 I 线性表出， 但不可由 II 线性表出；

(C). α_m 不可由 I 线性表出，但可由 II 线性表出；

(D). α_m 不可由 I 线性表出， 也不可由 II 线性表出。

5. 设 A 是 n 阶方阵，$AA^t=I_n$, A^t 表示转置，I_n 表示 n 阶单位阵， 且 $|A|=-1$, 则 _________.

(A). $A+I_n$ 一定是奇异阵；　(B). $A-I_n$ 一定是奇异阵；

(C). $A+I_n$ 一定是可逆阵；　(D). $A-I_n$ 一定是可逆阵.

6. 设 A， B 都为 n 阶对称矩阵，且 $|A|\neq 0$。若 I_n+AB 可逆，则 $((I_n+AB)^{-1}A)^t-(I_n+AB)^{-1}A=$ _________.

(A). $A-B$;　(B). $0_{n\times n}$;　(C). $A+B$;　(D). AB.

7. 设 T 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 $T^2=2T$ 当且仅当 _________.

(A). $\mathrm{Ker}(T)\bigcap\mathrm{Im}(T)=0$；　(B). $n=\dim\ \mathrm{Im}(T)+\dim\ \mathrm{Im}(T-2\mathbb{I})$；

(C). $V=\mathrm{Ker}(T)\oplus\mathrm{Im}(2T)$；　(D). $n=\dim\ \mathrm{Im}(T)+\dim\ \mathrm{Ker}(T-2\mathbb{I})$, 这里 $\mathbb{I}$ 恒等变换。

8. 设 A 是 n 阶方阵，α 是 n 维列向量，若 $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^t & 0\end{pmatrix}=r(A)$, 则 _________.

(A). 方程组 $AX=\alpha$ 必有唯一解;

(B). 方程组 $AX=\alpha$ 必有无穷多组解;

(C). 方程组 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y\end{pmatrix}=0$ 仅有零解;

(D). 方程组 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y\end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

二、填空题(每题3分，共24分)

1. 设 V 是次数不超过3的实多项式全体构成的线性空间。定义线性变换 $T:V\mapsto V$ 如下：$\forall\ f(x)\in V$, $T(f(x)):=f(x+1)-f(x)$, 则在 V 的基 $\{1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3\}$ 下，T 的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} \quad\quad\quad \end{pmatrix}$.

（装订线内不要答题）

2. 设 $\mathbb{R}^2$ 上有线性变换 φ: $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y)=(3x+y,-x+3y)$, 则 φ 的所有不变子空间为 ______________________________.

3. 设 A 为 3 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，已知 $|A|=\frac{1}{4}$, 则 $|(3A)^{-1}-(4A)^*|=$ _______________.

4. 设 A,B分别为 m, n 阶可逆方阵，分块阵 $C=\begin{pmatrix} 0 & |B|\cdot A \\ |A|\cdot B & 0 \end{pmatrix}$, 则 $C^{-1}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$.

5. 当 a, b, c 适合条件 _______________时，$(x^2+c)|(x^3+ax+b)$.

6. 数 1 是多项式 $x^5-4x^3+2x^2+3x-2$ 的 __________ 重根。

7. 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间，$\dim(W_1)=r_1,\dim(W_2)=r_2$. 若有非零向量 $\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2$ 使 $\alpha_1+\alpha_2=0$, 则 $\dim(W_1+W_2)$ _____ r_1+r_2.

8. 设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$ 是 n 阶实方阵，且代数余子式 $A_{i,j}=2a_{i,j}$ $i,j=1,\cdots n$, $|A|\neq 0,n\geq 3$ 且 n 为奇数， 则 $|A|=$ __________.

三、(本题10分) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=b \\ 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=1 \end{cases}$ 有3个线性无关的解，

（1）证明系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$。

（2）求 a,b 的值和方程组的通解。

四、(本题10分) 设 W_0, W_1, W_2 都是有限维线性空间 V 的子空间， 其中 $W_1 \subset W_2$, 且 $W_0 \bigcap W_1 = W_0 \bigcap W_2$, $W_0 + W_1 = W_0 + W_2$, 证明：$W_1 = W_2$.

五、(本题10分) 设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，已知线性变换 φ 在该组基下的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 求 φ 在基 $\eta_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \eta_2 = \epsilon_2, \eta_3 = \epsilon_3 + \epsilon_4, \eta_4 = \epsilon_4$ 下的矩阵 B;

(2) 求 φ 的核与像。

（装订线内不要答题）

六、(本题10分) 设 A 是一个 $m\times n$ 阶实矩阵，如下定义两个线性映射：

$$\varphi_A:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m,\quad X\mapsto AX,\quad \forall\, X\in\mathbb{R}^n;$$

$$\varphi_A^*:\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^n,\quad Y\mapsto A^tY,\ \forall\, Y\in\mathbb{R}^m;$$

证明： $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}\varphi_A\oplus\mathrm{Im}\varphi_A^*$.

七、(本题10分) 设 A 为 n 阶方阵， 证明：秩 $r(A^n)=r(A^{n+1})=\cdots=r(A^m)=\cdots$ 对任意的 $m\geq n$成立。

八、(本题10分，请选做其中一题)

1. 设 n 阶可逆阵 A 中每行元素之和都等于常数 c, 证明 $c \neq 0$ 且 A^{-1} 中每行元素之和都等于 c^{-1}.

2. 设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=r$, 且 $A^2=A$ ， 证明：迹 $\mathrm{tr}(A)=r$.