（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2008～2009学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称： 高等代数I　　**课程序号：** MATH120011

开课院系： 数学科学学院　　**考试形式：** 闭卷

姓　名： ________　　**学　号：** ________　　**专　业：** ________

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

一、选择题(每题2.5分，共20分)

1. 设一个 n $(n>1)$ 阶方阵中每一项的值均为 1 或 -1，则该矩阵的行列式为 (　D　)

A. 1　　B. 0　　C. 奇数　　D. 偶数

2. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$，则 $\begin{vmatrix} 3a_{21} & -6a_{22} & 3a_{23} \\ 2a_{31} & -4a_{32} & 2a_{33} \\ -a_{11} & 2a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix} =$ (　C　)

A. $3d$　　B. $6d$　　C. $12d$　　D. $18d$

3. 设 A 、 B 为同阶方阵，且 A^{-1} 、 B^{-1} 、 $(A+B)^{-1}$ 均存在。则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} =$ (　A　)

A. $A(A+B)^{-1}B$　　B. $A(A+B)^{-1}$　　C. $(A+B)^{-1}B$　　D. $A+B$

4. 当 $t=$ (　C　) 时，向量组 $(1,1,1)$，$(t,1,2)$，$(1,t^2,1)$ 线性无关？

A. 1　　B. -1　　C. -2　　D. 2

5. 设 V 为数域 K 上的 $n\ (n>1)$ 维线性空间。下列结论（ C ）对 V 上所有的线性变换 φ 都成立。

A. $V=\operatorname{Im}\varphi\oplus\operatorname{Ker}\varphi$B. $\dim V=\dim\operatorname{Im}\varphi+\dim\operatorname{Ker}\varphi$C. $V=\operatorname{Im}\varphi+\operatorname{Ker}\varphi$D. $\operatorname{Im}\varphi\cap\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$

6. 设 $p(x)$ 是数域 K 上的不可约多项式，$f(x)=p^m(x)\ (m>1)$，$g(x)$，$h(x)\in K[x]$。则下列结论（ A ）正确。

A. $f(x)\mid g(x)h(x)\Rightarrow f(x)\mid g(x)$ 或 $f(x)\mid h(x)$

B. $f(x)\mid g(x)h(x)\Rightarrow f(x)\mid g(x)$ 或存在正整数 k，$f(x)\mid h^k(x)$

C. $(f(x),f'(x))\neq 1$

D. $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有重根。

7. 当 a,b 分别为（ D ）时，$(x-1)^2$ 整除 ax^4+bx^2+1。

A. -1，2　　B. -1，-2　　C. 1，2　　D. 1，-2

8. 设 A，B 都是数域 K 上的 $n\ (n>1)$ 阶矩阵。则下列结论成立的是（ D ）

A. 若 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，则 A 的列向量都是 B 的列向量的线性组合；

B. 若 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，则 B 的列向量都是 A 的列向量的线性组合；

C. 若 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，则 A 的行向量都是 B 的行向量的线性组合；

D. 若 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，则 B 的行向量都是 A 的行向量的线性组合；

二、填空题(每题2.5分，共20分)

1. 两个多项式 $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+9x-6$ 和 $g(x)=x^3-6x^2+12x-8$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))=\underline{\quad x-2\quad}$.

（装订线内不要答题）

2. 已知矩阵 X 满足下列方程：

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $X = \underline{\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}$.

3. 某线性空间 V 上的线性变换 φ 在某组基下的表示矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

则 φ 的核空间的维数为 $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \underline{\quad 1 \quad}$.

4. 设 A 为 n 阶方阵，A^* 表示 A 的伴随矩阵，已知 $|A^*| = 2^{n-1}$, 则 $|A-(A^*)^*| =$

$\underline{\quad 2(\omega - 2^{n-2})^n \quad \text{其中 } \omega^{n-1} = 1 \quad}$.

5. 如果 $\mathbb{K}_m[x]$ 表示数域 $\mathbb{K}$ 上次数不超过 m 的一元多项式组成的线性空间，设 $U = \mathbb{K}_3[x]$, $V = \mathbb{K}_4[x]$，现有一个线性映射 $\mathcal{T} : U \mapsto V$ 满足 $\mathcal{T}(f) = \int_1^x f(t)dt$, $\forall f(x) \in U$. 分别取定 U, V 的基 $\{1, x+1, x^2, x^3\}$ 和 $\{1, x, x^2, (x+1)^3, x^4\}$， 则按课本上的定义方式，$\mathcal{T}$ 在这两组基下 对应的矩阵应为

$$A = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}.$$

6. 多项式 $x^p + px + 1$ （p 为奇素数）在有理数域上（是/否） $\underline{\quad 否 \quad}$ 可约。

7. 设方阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$, 其中 A,C 均为可逆方阵，则

$M^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}}$.

8. 已知 V 是一个 3 维复线性空间，e_1,e_2,e_3 是一组基，V 上线性变换 φ 在这组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 V 恰有 3 个互不相同的 1-维 φ-不变子空间， 则 a 的取值范围为 $\underline{\quad a\neq 0\text{和}a\neq 1\quad}$.

三、(本题10分) 设 V 是列向量空间 $\mathbb{R}^3$, e_1, e_2, e_3 是 V 基本向量组，设 φ 是 V 上的线性变换且 φ 在基本向量组下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 现有向量组 $\alpha_1=(-1,-1,2)^t$，$\alpha_2=(3,2,0)^t$, $\alpha_3=(-1,-1,1)^t\in V$. 问

(1) α_1, α_2, α_3 是否为 V 的基?

(2) 如果 α_1, α_2, α_3 是 V 的基，求 φ 在这组基下的矩阵。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 因为 $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，所以 $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，故而α_1, α_2, α_3 是 V 的基;

2. 记$P=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&2&-1\\2&0&1\end{pmatrix}$，则$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)\,P$，$\varphi\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$

$\varphi\,(e_1,e_2,e_3)\,P=(e_1,e_2,e_3)\,AP=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,P^{-1}AP$，故$\varphi$在这组基下的矩阵为$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-17&11&-12\\8&-3&5\\36&-24&25\end{pmatrix}$。

四、(本题10分) 已知 $\alpha_1=(2,1,4,-2)^t$，$\alpha_2=(5,-1,3,3)^t$ 和 $\alpha_3=(1,0,1,0)^t$ 是方程组 $\begin{cases}2x_1-9x_2-cx_3+bx_4=1\\x_1-11x_2+ax_3+bx_4=1\\5x_1-29x_2-2x_3-15x_4=3\\4x_1-31x_2-x_3-15x_4=3\end{cases}$ 的三个解，

(1) 证明：方程组系数矩阵的秩为 2;

(2) 求出参数 a，b，c 的值，并求解方程组。

1. 容易看出，方程组第3、4个方程的未知数系数不成比例，所以系数矩阵的秩应大于或等于2；同时由于$\alpha_3-\alpha_1=(-1,-1,-3,2)^t$，$\alpha_2-\alpha_1=(3,-2,-1,5)^t$是相应齐次方程组的解，且也不成比例，所以齐次方程组的基础解系中至少有两个线性无关的解，于是系数矩阵的秩小于或等于$4-2=2$，故只能是2；

2. 由系数矩阵的秩为2，所以$r\begin{pmatrix}2&-9&-c&b\\1&-11&a&b\\5&-29&-2&-15\\4&-31&-1&-15\end{pmatrix}=2$，$\begin{pmatrix}2&-9&-\\1&-11&a\\5&-29&-\\4&-31&-\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -11 & a & b \\ 0 & 13 & -2a-c & -b \\ 0 & 26 & -5a-2 & -5b-15 \\ 0 & 13 & -4a-1 & -4b-15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -11 & a & b \\ 0 & 13 & -2a-c & -b \\ 0 & 0 & 2c-a-2 & -3b-15 \\ 0 & 0 & c-2a-1 & -3b-15 \end{pmatrix}$$

，所以 $\begin{matrix} 2c-a-2=0 \\ c-2a-1=0 \end{matrix}$，得到$a=0, c=1$，则 $-3b-15=0$得$b=-5$，此时增广矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -9 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & -11 & 0 & -5 & 1 \\ 5 & -29 & -2 & -15 & 3 \\ 4 & -31 & -1 & -15 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{13} & -\frac{10}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故方程组的解为$\begin{pmatrix} \frac{2}{13} \\ -\frac{1}{13} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{11}{13} \\ \frac{1}{13} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{10}{13} \\ -\frac{5}{13} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（装订线内不要答题）

五、(本题10分) 已知 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$, 其中 α_1, $\cdots$, α_n 是 A 的列向量组，设 T 是任意 m 阶非奇异方阵 并记 $TA=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$。设 $\{i_1,\cdots,i_k\}\subset\{1,\cdots,n\}$ 是任意指标集，证明 $\alpha_{i_1},\cdots$, α_{i_k} 线性相关当且仅当 $\beta_{i_1},\cdots$, β_{i_k} 线性相关。

六、(本题10分) 如果 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{K}[x]$，且 A 为 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵，则记 $f(A)=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0I_n$，其中 I_n 为单位阵。现设多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为 $\mathbb{K}$ 上 的两个互素的多项式。证明：齐次线性方程组$f(A)\,g(A)\,X=0$ 的解空间 V 是齐次线性方程组$f(A)\,X=0$ 的解空间 V_1 与 $g(A)\,X=0$ 的解空间 V_2 的直和, 即证 $V=V_1\oplus V_2$。

七、(本题10分) 如果 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，β_1, β_2 是两个给定的列向量。证明方程组 $AX=\beta_1$ 与 $AX=\beta_2$ 同时有解当且仅当秩 $R(A)=R(\widetilde{A})$, 其中 $\widetilde{A}=(A\ \beta_1\ \beta_2)$ 是 $m\times(n+2)$ 阶分块矩阵。

（装订线内不要答题）

八、(本题10分) 对一个方阵 A，如果 $A^2 = A$， 则称 A 为一个幂等矩阵。证明：任一方阵均可表示为一个非奇异矩阵与一个幂等矩阵的乘积。