$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵 (matrix)，其中 a_{ij} 称为 A 的 (i, j)-元素。若$m = n$ 则 A 称为 n 阶方阵。

$n = 1$ 的矩阵通常叫做（m 阶）列向量。

$m = 1$ 的矩阵通常叫做（n 阶）行向量。

两个特殊的矩阵：

1）所有元素全是零的 $m\times n$ 矩阵，记作 $0_{m\times n}$，有时简记作 0.

2）

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\&&\cdots&\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

有时见简记作 I.

如果两个矩阵的行数、列数分别相等，并且对应的元素也相等，则称两个矩阵是相等的。

运算：

1）加法；

2）数乘；

3）乘法：

$$C_{m\times p}=A_{m\times n}B_{n\times p}.$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

课堂练习

p.60: 1(3)(4),2(3)(4), 3

运算法则：

1）乘法结合律：

$$(AB)C = A(BC),$$

其中 A, B, C 分别是 $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$ 矩阵。

证明：AB 的 (i,k) 元素是 $\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}$. 因此$(AB)C$ 的 (i,j) 元素是

$$\sum_{k=1}^{p}(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk})c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}c_{kj}.$$

BC 的 (k,j) 元素是 $\sum_{r=1}^{p} b_{kr}c_{rj}$. 因此 $A(BC)$ 的(i,j) 元素是

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\sum_{r=1}^{p} b_{kr}c_{rj}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} a_{ik}b_{kr}c_{rj}.\square$$

2) 加法分配律： $A(B+C) = AB + AC.$

3) $c(AB) = (cA)B = A(cB).$

4) $I_mA = A, AI_n = A.$

方阵的幂： A^k 定义为 k 个 A 的乘积。

几个需要注意的地方：
1）AB 一般不等于 BA.
2）两个非零矩阵的积可能等于零，例如：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $AB = AC$ 不能推出 $B = C$.

矩阵 A 的转置记作 A' 或 A^T.

性质：

1) $(A')' = A$.

2) $(A+B)' = A' + B'$.

3) $(cA)' = c(A')$.

4) $(AB)' = B'A'$.

证明：设 A 是 $m \times p$ 矩阵，B 是 $p \times n$ 矩阵。

AB 的 (i,j)元素是 $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$. 因此 $(AB)'$ 的(i,j)元素是 $\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki}$.

B' 的 (i,j) 元素是 b_{ji}. A' 的 (i,j) 元素是 a_{ji}. 因此 $B'A'$ 的 (i,j) 元素是 $\sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk}$. $\square$

定义1. 若 $A' = A$, 则 A 称为对称矩阵。若 $A' = -A$, 则 A 称为反对称（或斜对称）矩阵。

定义2. 如果一个矩阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素 a_{ij} 全是复（实、整）数，则A 称为一个复（实、整）矩阵。记$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$, 称为 A 的共轭。

例：(p.61:10) 证明任一 n 阶方阵 A 可表示成一个对称阵和一个反对称阵的和。

证明：令

$$B = \frac{1}{2}(A + A'), C = \frac{1}{2}(A - A').$$

则

$$B' = \frac{1}{2}(A' + A) = B, C' = \frac{1}{2}(A' - A) = -C.$$

因此 B 是对称阵，而 C 是反对称阵。

然而 $A = B + C$. $\square$

作业：

p.61: 5,6,8,9,12,15

单位列向量：

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，则 Ae_k 等于 A 的第 k 列。

$$f_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), f_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, f_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

叫做单位行向量。

设 A 是一个 $n \times p$ 矩阵，则 f_kA 等于 A 的第 k 行。

对角阵：

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

可记为 $diag(d_1, \ldots, d_n)$. 例如 $diag(1, \ldots, 1)$ 就是 I_n.

设 A 是一个 $n \times p$ 矩阵，则 DA 的第 k 行是 A 的第 k 行乘以 d_k.

设 C 是一个 $p \times n$ 矩阵，则 CD 的第 k 列是 C 的第 k 列乘以 d_k.

将 I_n 的 (i, i) 元素换成一个非零数 c 得到的 n 阶方阵称为第二类初等矩阵，记作 $P_i(c)$.

左乘 $P_i(c)$ 的效果是将第 i 行乘 c 而保持其他行不变。

右乘 $P_i(c)$ 的效果是将第 i 列乘 c 而保持其他列不变。

设 $i \neq j$. 将 I_n 的第 i 列和第 j 列对换后所得的 n 阶方阵称为第一类初等矩阵，记作 P_{ij}.

左乘 P_{ij} 的效果是将第 i 行和第 j 行互换。

右乘 P_{ij} 的效果是将第 i 列和第 j 列互换。

设 $i \neq j$. 将 I_n 的 (j,i) 元素 0 换成一个非零数 c 得到的n 阶方阵称为第三类初等矩阵，记作 $T_{ij}(c)$.

左乘 $T_{ij}(c)$ 的效果是将第 i 行乘 c 后加入第 j 行。

右乘 $T_{ij}(c)$ 的效果是将第 j 列乘 c 后加入第 i 列。

方阵的行列式：

设 A 是一个方阵，它的行列式记作 $|A|$, 也可记成 $\det(A)$.

例1. 设

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & & \cdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

则 $|V| \neq 0$ 当且仅当 $x_1, \ldots, x_n$ 两两不同。

定理1. 设 A, B 是两个 n 阶方阵，则 $|AB| = |A||B|$.

证明留在将来。先来讨论应用。

1) 设

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & & \cdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

则

$$V'V = \begin{pmatrix} 1 & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \cdots & \sum_i x_i^{n-1} \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \cdots & \sum_i x_i^n \\ & & & \cdots & \\ \sum_i x_i^{n-1} & \sum_i x_i^n & \sum_i x_i^{n+1} & \cdots & \sum_i x_i^{2n-2} \end{pmatrix}.$$

根据定理，$|V'V| = \prod_{i<j}(x_j - x_i)^2$.

参见p.84: 5

2) (p.84:6) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & & \cdots & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

设 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是全部 n 次单位根。令

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_n \\ & & \cdots & \\ \epsilon_1^{n-1} & \epsilon_2^{n-1} & \cdots & \epsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

则 AB 的 (i,j) 元素是

$$\begin{aligned} &a_1\epsilon_j^{i-1} + a_2\epsilon_j^{i} + \cdots + a_{n-i+1}\epsilon_j^{n-1} + a_{n-i+2}\epsilon_j^{n} + \cdots \\ &= \epsilon_j^{i-1}(a_1 + a_2\epsilon_j + \cdots + a_n\epsilon^{n-1}). \end{aligned}$$

记

$$f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}.$$

则 AB 的 (i,j) 元素是 $\epsilon_j^{i-1}f(\epsilon_j)$. 于是

$$|AB| = \begin{vmatrix} f(\epsilon_1) & f(\epsilon_2) & \cdots & f(\epsilon_n) \\ \epsilon_1 f(\epsilon_1) & \epsilon_2 f(\epsilon_2) & \cdots & \epsilon_n f(\epsilon_n) \\ & & \cdots & \\ \epsilon_1^{n-1}f(\epsilon_1) & \epsilon_2^{n-1}f(\epsilon_2) & \cdots & \epsilon_n^{n-1}f(\epsilon_n) \end{vmatrix}$$

$$= f(\epsilon_1)\cdots f(\epsilon_n)|B|.$$

由于 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 两两不同，$|B| \neq 0$. 因此$|A| = f(\epsilon_1)\cdots f(\epsilon_n)$.

3) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & & \cdots & \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

用 -1 的全部 n 次根来取代上题中的单位根。

4) (p.100,23) 设

$$C=\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{pmatrix}.$$

求 $|C|$.

解：令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $AB=C$. 故 $|C|=|A||B|=0$. $\square$

5) 设

$$C=\begin{pmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ & & \cdots & \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{pmatrix}.$$

求 $|C|$.

注意 C 是一个 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵。

解：令

$$B = \begin{pmatrix} b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \\ & & \cdots & \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$|B| = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{j>i} (b_j - b_i).$$

令

$$A=\begin{pmatrix} C_n^0 & C_n^1a_0 & C_n^2a_0^2 & \cdots & C_n^na_0^n \\ C_n^0 & C_n^1a_1 & C_n^2a_1^2 & \cdots & C_n^na_1^n \\ & & & \cdots & \\ C_n^0 & C_n^1a_n & C_n^2a_n^2 & \cdots & C_n^na_n^n \end{pmatrix}.$$

则

$$|A|=\prod_{i=0}^{n}C_n^i\prod_{i<j}(a_j-a_i).$$

而 $AB=C$.

所以

$$|C|=|A||B|=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=0}^{n}C_n^i\prod_{j>i}(b_j-b_i)(a_j-a_i).\square$$

矩阵的分块运算

1) 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ & & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

则 AB 是一个 $m \times k$ 矩阵。

设 $1 \le p < n$. 令

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix} a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \cdots & a_{p+1,n} \\ a_{p+2,1} & a_{p+2,2} & \cdots & a_{p+2,n} \\ & & \cdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

则 A 可以写成

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

A_1B 是 $p \times k$ 矩阵，其 (i,j) 元素是

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}.(1 \leq i \leq p)$$

A_2B 是 $(n-p) \times k$ 矩阵，其 $(i-p,j)$ 元素是

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}.(p+1 \leq i \leq m)$$

所以

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明：

将 A 分成若干块

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_d \end{pmatrix},$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_dB \end{pmatrix}.$$

2) 设 $1 \le q < k$. 令

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ & & \cdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mq} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{1,q+1} & b_{1,q+2} & \cdots & b_{1,k} \\ b_{2,q+1} & b_{2,q+2} & \cdots & b_{2,k} \\ & & \cdots & \\ b_{m,q+1} & b_{m,q+2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

则 B 可以写成

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}.$$

AB_1 是 $m \times q$ 矩阵，其 (i,j) 元素是

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}. (1 \le j \le q)$$

AB_2 是 $m \times k - q$ 矩阵，其 $(i, j-q)$ 元素是

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}. (q+1 \le j \le k)$$

所以

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 \end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明：

将 B 分成若干块

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_d \end{pmatrix},$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_d \end{pmatrix}.$$

特别， AB 的第 j 列是 A 与 B 的第 j 列的乘积。

3) 设 $1 \leq q < n$. 令

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mq} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,q+1} & a_{1,q+2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,q+1} & a_{2,q+2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \cdots & \\ a_{m,q+1} & a_{m,q+2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

则A 可以写成 (A_1A_2).

令

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ & & \cdots & \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qk} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{q+1,1} & b_{q+1,2} & \cdots & b_{q+1,k} \\ b_{q+2,1} & b_{q+2,2} & \cdots & b_{q+2,k} \\ & & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

则 B 可以写成

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

A_1B_1 和 A_2B_2 都是 $m\times k$ 矩阵。A_1B_1 的 (i,j) 元素是

$$\sum_{s=1}^{q} a_{is}b_{sj}.$$

A_2B_2 的 (i,j) 元素是

$$\sum_{s=q+1}^{n} a_{is}b_{sj}.$$

所以 $A_1B_1+A_2B_2$ 的 (i,j) 元素是

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}.$$

因此 $AB=A_1B_1+A_2B_2$.

$$(A_1A_2\cdots A_p)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_p\end{pmatrix}=A_1B_1+A_2B_2+\cdots+A_pB_p,$$

只要 A_i 的列数等于 B_i 的行数。

4) 考虑一般的分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ & & \cdots & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ & & \cdots & \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix},$$

其中每个块A_{ij} 的列数和 B_{jl} 的行数相同，则

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ & & \cdots & \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix},$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}.$$

这个公式可对块数用数学归纳法证明。

分块的常见场合：

1）分块对角阵；

2）分块三角阵；

3）2×2 分块。

例2.

$$\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

对任何 n 阶方阵 A, B 成立。

作为推论，任何一个形为

$$\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

的 $2n$ 阶方阵是一些第三类初等矩阵的乘积。

定理2. $|AB| = |A||B|$ 对任何 n 阶方阵 A, B 成立。

证明：

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

两边取行列式，并将

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

写成一些第三类初等矩阵的乘积。

n 个变量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

则方程组可写成

$$Ax = b.$$

设 x 是一组解。

令 B_k 是将单位矩阵 I_n 的第 k 列换成 x 而得的矩阵。则 $|B_k| = x_k$. 令 C_k 是将 A 的第 k 列换成 b 而得的矩阵。则

$$AB_k = C_k.$$

两边取行列式得

$$|A|x_k = |C_k|.$$

这正好是 Cramer 法则。

例3.

$$|I_n + AB| = |I_n + BA|$$

(见p.99: 12)

作业：
p.93:3,6,7,8
p100: 17,25

方阵的逆阵

设 A 是一个 n 阶方阵。若存在一个 n 阶方阵 B 满足$BA = AB = I_n$, 则称 A 是可逆阵（或非异阵），B 称为 A 的逆，记作A^{-1}. 不可逆的方阵叫奇异阵。

要使 A^{-1} 有意义，必须验证 A^{-1} 的唯一性。
设 C 是满足 $CA = AC = I_n$ 的另一个 n 阶方阵，则

$$C = CI_n = CAB = I_nB = B.$$

这就验证了 A^{-1} 的唯一性。

由于 $|A||A^{-1}| = 1$, 可逆阵的行列式不等于零。
不可逆方阵的例子：

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

性质：

1) 若 A 可逆则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

2) 若 n 阶方阵 A,B 可逆则 AB 也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3) 若 A 可逆, $c\neq 0$. 则 cA 也可逆，且

$$(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}.$$

4) 若 A 可逆则 A' 也可逆，且 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

5) 若 A 可逆则 $\overline{A}$ 也可逆，且 $\overline{A}^{-1}=\overline{A^{-1}}$.

6) 三类初等矩阵都是可逆阵：

$$P_{ij}^{-1}=P_{ij}.$$

$$P_i(c)^{-1}=P_i(\frac{1}{c}).$$

$$T_{ij}(c)^{-1}=T_{ij}(-c).$$

定理3. n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

证明：只需证明充分性。

记 $d = |A|$. 则 $d \neq 0$. 令

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & & \cdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式，（这个矩阵 B 叫做 A 的伴随阵，记作 A^*）。则 AB 的 (i,j) 元素是

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

所以

$$AB = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}.$$

另一方面 BA 的 (i,j) 元素是

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj}.$$

所以

$$BA = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}.$$

因此

$$A^{-1} = \frac{1}{d}B. \square$$

例4. 设 $ad-bc\neq 0$, 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例5. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ii} 都是方阵。则 A 可逆当且仅当每个 A_{ii} 可逆。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{rr}^{-1} \end{pmatrix}.$$

系4. 设 $A = A_1 \cdots A_k$, 其中 $A, A_1, \ldots, A_k$ 是 n 阶方阵。则A 可逆当且仅当 $A_1, \ldots, A_k$ 全是可逆的。

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

证明：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |A_1 \cdots A_k| \neq 0 \Leftrightarrow |A_i| \neq 0$ 对所有 i 成立$\Leftrightarrow A_1, \ldots, A_k$ 全可逆。 $\square$

通常的公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 不能推广到方阵的运算。

事实上，

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$$

$$=(A+B)A+(A+B)B$$

$$=A^2+BA+AB+B^2.$$

当 $AB=BA$ 时，则 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. 此时对任何自然数 n, $(A+B)^n$ 可按二项式定理来展开。

一个特别的情形是 $B=I$. 由于 $IA=AI$, 关于 I 和 A 的多项式可按熟知的公式计算。

例6. 若 A 是 n 阶方阵满足 $A^k = 0$ 则

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I_n.$$

(见p.61:7) 从而得知，$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$. (见p.66:6)

作业：

p.83: 2,3,4

p.99: 8,9,10,11

阶梯形矩阵

例7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一般的阶梯形矩阵的形状是

$$\begin{pmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & * & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

注意

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不是阶梯形的。

约定零矩阵是阶梯形的。

定理5. 设 A 是任意一个 $m \times n$ 矩阵。则存在有限多个 m 阶初等矩阵$Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ 使 $Q_1 Q_2 \cdots Q_r A$ 是阶梯形的。

证明：对 A 的行数 m 进行归纳。

如果 $A = 0$ 则 A 已经是阶梯形的了。所以可以设 $A \neq 0$. 假定 A 的前 $k-1$ 列全是0。则有下面两种情形：

1）$a_{1k} \neq 0$;

2) $a_{1k} = 0$. 此时，存在 P_{1j} 使 $P_{1j}A$ 的 $(1, k)$ 元素不等于零。

因此我们只要对第一种情形证明就可以了。

这时存在有限多个第三类初等矩阵 $Q_1, \ldots, Q_s$ 使

$$Q_s \cdots Q_1 A = \begin{pmatrix} T & W \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 $T = (0, \ldots, 0, a_{ik})$, 而 B 含$m-1$ 行。

根据归纳假设存在 $(m-1)$ 阶初等矩阵 $E_1, \ldots, E_k$ 使 $C = E_k \cdots E_1 B$ 是阶梯形的。于是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} Q_s \cdots Q_1 A = \begin{pmatrix} T & W \\ 0 & C \end{pmatrix}. \square$$

例8. 将矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

化成阶梯形矩阵。

引理6. 任何一个可逆阵可以写成一些初等方阵的乘积。

证明：设 A 是一个 n 阶可逆阵，则存在初等矩阵 $Q_1,\ldots,Q_s$ 使$B=Q_s\cdots Q_1A$ 是上三角可逆阵。

由于 B 的对角线上的元素都不等于零，存在第三类初等矩阵$P_1,\ldots,P_k$ 使 $C=P_k\cdots P_1B$ 是对角阵。而 C 可以写成若干个第二类初等矩阵 $D_1,\ldots,D_t$ 的乘积。即

$$D_1\cdots D_t=P_k\cdots P_1Q_s\cdots Q_1A.$$

于是

$$A=Q_1^{-1}\cdots Q_s^{-1}P_1^{-1}\cdots P_k^{-1}D_1\cdots D_t.\square$$

逆阵的计算

例9. 求
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Gauss 消去法原理

设有

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. .$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

则方程组可写成

$$Ax = b.$$

设初等矩阵 $Q_1, \ldots, Q_k$ 使 $W = Q_k \cdots Q_1 A$ 是阶梯形的。则方程组等价于方程组

$$Wx = Q_k \cdots Q_1 b.$$

这实现了对原方程组的化简。

以上讨论可归纳为：

$$(Ab) \quad \underbrace{\longrightarrow \cdots \longrightarrow}_{elemantary\ row\ transformations} \quad (W, Q_k \cdots Q_1 b).$$

例10.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \ \ 4 \\ \quad\ + \ x_2 \ + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = \ \ 1 \end{cases}$$

等价关系

设 S 是一个集合。可以在 S 的某些元素间定义某种“关系”，若元素$a, b \in S$ 具有这种关系，记 $a \to b$.

例：

1）设 S 是一群人，定义 $a \to b$, 如果 a 是 b 的儿子。

2）设 R 是全体实数，定义 $a \to b$, 如果 $a \leq b$.

3）设 S 是复旦大学的全体学生，$a \to b$ 如果 a 和 b 在同一个班级里。

4）设 P 是平面上所有的点构成的集合，令 $a \to b$ 如果 a 和 b 到原点的距离相同。

5）设 $\mathbb{Z}$ 是全体整数所构成的集合，p 是一个固定的自然数，令 $a \to b$ 如果 $a - b$ 被 p 整除。

定义3. 设 $\rightarrow$ 是集合 S 中的一个关系。如果这个关系满足下面条件：

1. （自返性）$a \rightarrow a$ 对每个 $a \in S$ 成立；
2. （对称性）若 $a \rightarrow b$ 则 $b \rightarrow a$;
3. （传递性）若 $a \rightarrow b, b \rightarrow c$ 则 $a \rightarrow c$.

则称这个关系是一个等价关系，通常记作 $\sim$.

上面五个例子中的最后三个关系是等价关系。

定义4. 设集合 S 中有一个等价关系。设 A 是 S 的一个子集，满足条件

1）$a \sim b$ 对任何 $a, b \in A$ 成立；

2）对任何 $a \in A$ 及任何 $b \notin A$, 都有 $a \not\sim b$.

则称 A 为 S 中的一个等价类。

在上面例3中，班级是等价类；在例 4) 中以原点为圆心的圆周是等价类；例 5)中的等价类叫 $\pmod p$ 同余类。

容易看出，

1）S 的任何一个元素都在某一个等价类中；

2）任何两个不同的等价类都不相交。

设 B 是 S 的一个子集，满足下面条件：对任何 $a \in S$, 存在唯一的 $b \in B$ 使 $a \sim b$. 则称 B 为这个等价关系的代表元集合。

矩阵的相抵

对于固定的一对自然数 m, n. 记 $M(m,n)$ 为 $m\times n$ 矩阵全体所构成的集合。设$A, B \in M(m,n)$. 若存在 m 阶初等矩阵$P_1, \ldots, P_r$ 和 n 阶初等矩阵 $Q_1, \ldots, Q_s$ 使

$$A = P_1 \cdots P_r B Q_1 \cdots Q_s,$$

则称 A 和 B 相抵。

矩阵的相抵是一种等价关系。

引理7. $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q 使 $B = PAQ \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q 使 $PA = BQ$.

定理8. 1) 任何一个非零的 $A \in M(m,n)$ 都和一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相抵；

2)

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相抵当且仅当 $r = s$.

证明：1）先通过初等行变换将 A 变成阶梯形矩阵后再通过初等列变换变到所需形式。

2）设 $r < s$. 假定

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相抵。则存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q 使

$$P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

将

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

写成

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

其中 D 是一个对角阵，其左上角的元素是1。将 P, Q 分块

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix},$$

其中 P_1, Q_1 都是 r 阶方阵。则

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}.$$

由此推得 $Q_2 = 0, DQ_4 = 0.$

从 $DQ_4 = 0$ 得知 Q_4 的第一行元素全为零。于是 Q 的前 $r+1$ 行中每行的最后 $n-r$ 个元素全是零。所以 $|Q| = 0$. 这和 Q 是可逆阵矛盾。□

由上面定理得知，在每个相抵等价类中可以选取一个形为

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵作为该类的代表元，称为相抵标准形。整数 r 称为该类的秩(rank)。任何一个矩阵都有一个唯一确定的秩。

在 $m\times n$ 矩阵集合 $M(m,n)$ 中共有 $1+\min(m,n)$ 个相抵标准形。

作业：
p.77: 2,3,4
p.83: 3

例题

例11. 假定 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 是两个 n 阶方阵， $0\le r<n$. 设当 $i\ge j$ 时 $a_{ij}=0$. 当 $i\ge j-r+1$ 时 $b_{ij}=0$. 记$C=(c_{ij})=AB$. 则当 $i\ge j-r$ 时 $c_{ij}=0$.

证明：当 $i\ge j-r$ 时

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$=\sum_{k=1}^{i}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$=\sum_{k=1}^{i}0\cdot b_{kj}+\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}\cdot 0\Box$$

例12. (p.91:5) 设 A 是 n 阶上三角阵且其主对角线上的元素全是零。求证$A^n=0$.

证明：应用上题结果即可。

例13. (p.91:7) 元素都是整数的矩阵称为整数阵。若一个整数阵的行列式等于 ±1 则该整数阵称为一个幺模阵。求证整数阵 A 是一个幺模阵当且仅当A 有一个整数逆矩阵。

证明：设 A^{-1} 存在且 A^{-1} 是整数矩阵。由 $AA^{-1} = I$ 得$|A||A^{-1}| = 1$. 由于 $|A|$ 和 $|A^{-1}|$ 是整数，所以 $|A| = \pm1$.

反之，设 A 是幺模阵。则 A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & & \cdots & \\ A_{1n} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

这是一个整数矩阵。 $\square$

例14. (p.91:9(1)) 可逆上三角阵的逆阵也是上三角阵。

证法一：记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

则 $a_{11}\neq 0, a_{22}\neq 0, \ldots, a_{nn}\neq 0.$

对于 $i>j$, 余子式 M_{ji} 仍是上三角的且其 (j,j) 元素是0。因此A^{-1} 中的 (i,j) 元素是0。这表明 A^{-1} 是上三角阵。 □

证法二：记 $A^{-1}=(b_{ij})$. 假如 A^{-1} 不是上三角阵，则存在$r>s$ 使 $b_{rs}\neq 0$ 并且 $b_{rj}=0$ 对所有 $j<s$ 成立。按矩阵乘法的法则 $A^{-1}A$ 的 (r,s) 元素是

$$\begin{aligned}&b_{rs}a_{ss}+b_{r,s+1}a_{s+1,s}+\cdots+b_{rn}a_{n,s}\\&=b_{rs}a_{ss}+b_{r,s+1}\cdot 0+\cdots+b_{rn}\cdot 0\neq 0.\end{aligned}$$

这和 $A^{-1}A=I$ 矛盾。□

证法三：对 A 的阶数 n 归纳。当 $n=1$ 时结论当然成立，设结论对$n-1$ 阶方阵成立。将 n 阶可逆上三角阵 A 写成分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & w \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

其中 $w=(a_{12},\ldots,a_{1n})$, A_1 是一个 $n-1$ 阶上三角阵。由于 A 的对角线上元素全不等于零，故A_1 是可逆的，由归纳假设 A_1^{-1} 是上三角阵。直接验证上三角阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & -a_{11}^{-1}wA_1 \\ 0 & A_1^{-1} \end{pmatrix},$$

是 A 的逆。□

例15. (p.91:10) 设 A 是 n 阶方阵，$A^2 = A$. 求证 $I - 2A$ 是可逆阵。

证明：$(I-2A)^2 = I - 4A + 4A^2 = I$. 因此 $(I-2A)^{-1} = I - 2A$. $\square$

例16. (p.92:18) 设 A, B 是 n 阶方阵，满足 $AB = BA$. 求证

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2 + B^2|.$$

证明：将第二行乘 i 加入第一行，再将第一列乘 $-i$ 加入第二列即可。 $\square$

作业：

p.99: 10,11,12,13,24