欢迎选听

我的信息

朱胜林

办公室:	**光华东楼** 1708
办公电话:	55664896
办公时间:	**周二下午** 1：30 – 3：30
电子邮件:	mazhusl@fudan.edu.cn
个人主页:	homepage.fudan.edu.cn/~zhusl
本课程主页:	jpkc.fudan.edu.cn/s/100/

高等代数

朱胜林

线性代数———背景知识

《九章算术》（距今已有 1800 多年，秦汉时期）

- “今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？答曰：上禾一秉九斗四分斗之一；中禾一秉四斗四分斗之一；下禾一秉二斗四分斗之三。”

线性代数———背景知识

《九章算术》（距今已有 1800 多年，秦汉时期）

- “今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？答曰：上禾一秉九斗四分斗之一；中禾一秉四斗四分斗之一；下禾一秉二斗四分斗之三。”
- 化成方程组为 $\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$，答案为：$x=\dfrac{37}{4}=9\dfrac{1}{4}, y=\dfrac{17}{4}=4\dfrac{1}{4}, z=\dfrac{11}{4}=2\dfrac{3}{4}$。

线性代数———背景知识

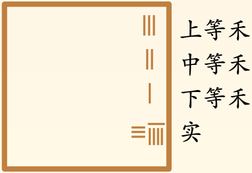
- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，

上等禾
中等禾
下等禾
实

-

线性代数———背景知识

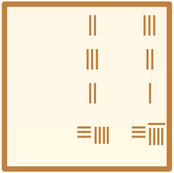
- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，



-

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，

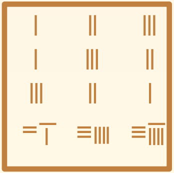


上等禾
中等禾
下等禾
实

-

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，

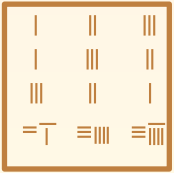


上等禾
中等禾
下等禾
实

-

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，以右行上禾遍乘中行而以真除，又乘其次，亦以直除。”



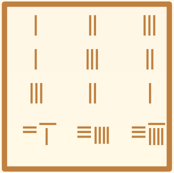
上等禾
中等禾
下等禾
实

$$\begin{array}{ccc} \downarrow 3 & \downarrow 3 & \\ \end{array}$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，以右行上禾遍乘中行而以真除，又乘其次，亦以直除。”



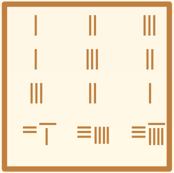
上等禾
中等禾
下等禾
实

- $$\begin{array}{ccc} \downarrow 3 & \downarrow 3 & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} -1 & -2 & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{26} & \mathbf{102} & 39 \end{pmatrix}$$

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，以右行上禾遍乘中行而以直除，又乘其次，亦以直除。”

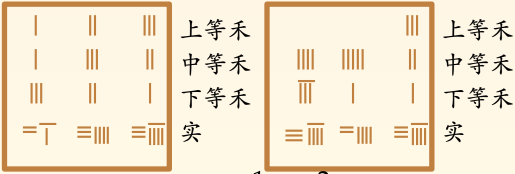


- $$\begin{array}{ccc} \downarrow 3 & \downarrow 3 & \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} -1 & -2 & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{26} & \mathbf{102} & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & 2 \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{39} & \mathbf{24} & 39 \end{pmatrix}$$

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，以右行上禾遍乘中行而以真除，又乘其次，亦以直除。”

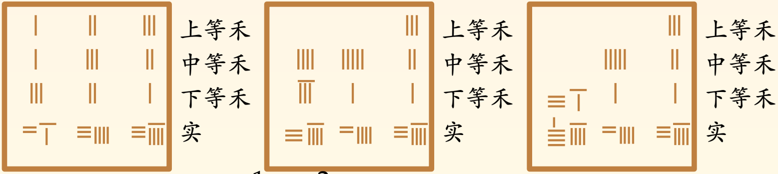


$$3 \qquad 3 \qquad\qquad -1 \qquad -2$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{26} & \mathbf{102} & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & 2 \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{39} & \mathbf{24} & 39 \end{pmatrix}$

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，以右行上禾遍乘中行而以真除，又乘其次，亦以直除。”



- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{9} & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{26} & \mathbf{102} & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & 2 \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{39} & \mathbf{24} & 39 \end{pmatrix}$$

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，以右行上禾遍乘中行而以真除，又乘其次，亦以直除。”

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \downarrow 5 & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 3 \\
4 & 5 & 2 \\
8 & 1 & 1 \\
39 & 24 & 39
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，以右行上禾遍乘中行而以真除，又乘其次，亦以直除。”

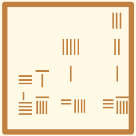
$$
\begin{array}{ccc} 5 & & \\ \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & 4 & \\ \end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{20} & 5 & 2 \\ \mathbf{40} & 1 & 1 \\ \mathbf{195} & 24 & 39 \end{pmatrix}
$$

线性代数———背景知识

- “术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，以右行上禾遍乘中行而以真除，又乘其次，亦以直除。”

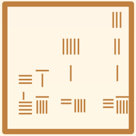
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \downarrow 5 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{20} & 5 & 2 \\ \mathbf{40} & 1 & 1 \\ \mathbf{195} & 24 & 39 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & 5 & 2 \\ \mathbf{36} & 1 & 1 \\ \mathbf{99} & 24 & 39 \end{pmatrix}$$



上等禾
中等禾
下等禾
实

线性代数———背景知识

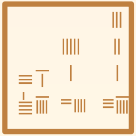
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & 5 & 2 \\ \mathbf{36} & 1 & 1 \\ \mathbf{99} & 24 & 39 \end{pmatrix}$$



上等禾
中等禾
下等禾
实

线性代数———背景知识

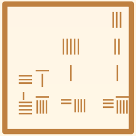
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & 5 & 2 \\ \mathbf{36} & 1 & 1 \\ \mathbf{99} & 24 & 39 \end{pmatrix}$$



上等禾
中等禾
下等禾
实

线性代数———背景知识

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & 5 & 2 \\ \mathbf{36} & 1 & 1 \\ \mathbf{99} & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

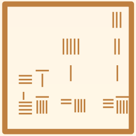


上等禾
中等禾
下等禾
实

1、 $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$， 下禾一秉二斗四分斗之三；

线性代数———背景知识

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & 5 & 2 \\ \mathbf{36} & 1 & 1 \\ \mathbf{99} & 24 & 39 \end{pmatrix}$$



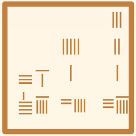
上等禾
中等禾
下等禾
实

1、 $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$， 下禾一秉二斗四分斗之三；

2、 $\left(24 - \frac{11}{4}\right) \div 5 = 1\frac{1}{4}$， 中禾一秉四斗四分斗之一；

线性代数———背景知识

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & 5 & 2 \\ \mathbf{36} & 1 & 1 \\ \mathbf{99} & 24 & 39 \end{pmatrix}$$



上等禾
中等禾
下等禾
实

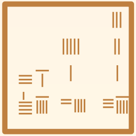
1、 $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$， 下禾一秉二斗四分斗之三；

2、 $\left(24 - \frac{11}{4}\right) \div 5 = 1\frac{1}{4}$， 中禾一秉四斗四分斗之一；

3、 $\left(39 - \frac{11}{4} - 2 \times \frac{17}{4}\right) \div 3 = 9\frac{1}{4}$， 上禾一秉九斗四分斗之一。

线性代数———背景知识

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & 5 & 2 \\ \mathbf{36} & 1 & 1 \\ \mathbf{99} & 24 & 39 \end{pmatrix}$$



上等禾
中等禾
下等禾
实

1、 $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$， 下禾一秉二斗四分斗之三；

2、 $\left(24 - \frac{11}{4}\right) \div 5 = 1\frac{1}{4}$， 中禾一秉四斗四分斗之一；

3、 $\left(39 - \frac{11}{4} - 2 \times \frac{17}{4}\right) \div 3 = 9\frac{1}{4}$， 上禾一秉九斗四分斗之一。

负数理论历史上的第一次也是出现在我国的《九章算术》中。

线性代数———背景知识

自 17 世纪开始，历经二百多年，线性方程组的完备的求解理论得以在西方数学家的努力下得以完成。

- 1693 年，Leibniz 着手拟定线性方程组的求解理论，由此导出了三阶行列式。
  对于一般方程

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_n \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_n \end{cases},$$

  Leibniz 从三个线性方程的系统中消去两个未知量，得到方程系数的表达式——行列式。这个行列式不等于零就意味着存在一组 x_1, x_2, x_3，满足所有的这三个方程；

线性代数———背景知识

- Maclaurin （1729 年左右）在研究非线性代数时得到了四阶行列式的表达式。至今仍在使用的不少代数法则就是他制定的；

线性代数———背景知识

- Maclaurin （1729 年左右）在研究非线性代数时得到了四阶行列式的表达式。至今仍在使用的不少代数法则就是他制定的；
- Cramer （1750 年）在平面上五点唯一决定一条二次曲线 $A+By+Cx+Dy^2+Exy+x^2=0$ 时，得到了五阶行列式概念：
  他说，一个行列式是这样一个乘积的代数和，这些乘积是在每一行和每一列中取一个且只取一个元素组成，每个乘积前的符号是这样确定，即从标准的左小右大次序出发，得到这些元素的排列数，如果这个数是偶数，则符号是正的，否则就是负的。

线性代数———背景知识

- Maclaurin （1729 年左右）在研究非线性代数时得到了四阶行列式的表达式。至今仍在使用的不少代数法则就是他制定的；
- Cramer （1750 年）在平面上五点唯一决定一条二次曲线 $A+By+Cx+Dy^2+Exy+x^2=0$ 时，得到了五阶行列式概念：
  他说，一个行列式是这样一个乘积的代数和，这些乘积是在每一行和每一列中取一个且只取一个元素组成，每个乘积前的符号是这样确定，即从标准的左小右大次序出发，得到这些元素的排列数，如果这个数是偶数，则符号是正的，否则就是负的。
- Bezout （1764 年）把取得符号的手续系统化，给出了当今仍在使用的排列定义，并给出当常数项均为零时，方程组有非零解当且仅当行列式为零。

线性代数———背景知识

- 1764 年以后，行列式理论用于给出建立线性方程组的一般理论。

线性代数———背景知识

- 1764 年以后，行列式理论用于给出建立线性方程组的一般理论。
- 后来 Vandermonde (1776 年) 对行列式理论进行了梳理，并把行列式理论从线性方程组求解中独立出来，引入了一条法则，用二阶子式和它们的余子式来展开行列式，成为这门理论的奠基人。

线性代数———背景知识

- 1764 年以后，行列式理论用于给出建立线性方程组的一般理论。
- 后来 Vandermonde (1776 年) 对行列式理论进行了梳理，并把行列式理论从线性方程组求解中独立出来，引入了一条法则，用二阶子式和它们的余子式来展开行列式，成为这门理论的奠基人。
- Laplace （1772 年）受 Cramer 和 Bezout 的工作的启发，推广了 Vandermonde 的结果，用余子式的集合来展开行列式，成为后来的 Laplace 定理。

线性代数———背景知识

- Euler （1750 年，那时的西方数学对负数还未完全接受）首先注意到了方程个数与未知数个数相同的线性方程组不一定有唯一解，会出现无解或有无穷解的方程组，后来 Frobenius 对此情况进行了细致的分析，定义了线性相关和无关的概念，并得到了解的结构。

线性代数———背景知识

- Euler （1750 年，那时的西方数学对负数还未完全接受）首先注意到了方程个数与未知数个数相同的线性方程组不一定有唯一解，会出现无解或有无穷解的方程组，后来 Frobenius 对此情况进行了细致的分析，定义了线性相关和无关的概念，并得到了解的结构。
- Euler 的构造很简单，取一个二元一次方程，另一个是前一个的倍式，此时有无穷组解；若改变一下后一个的常数项，则变为无解；当然那时的人们认为这样的方程不值得研究。Euler 分别讨论了 2、3、4 个未知数的情形。
  Euler 在线性方程组方面的研究工作被 Cramer 的行列式理论所终止！

线性代数———背景知识

- 在方程个数与未知数个数不同的线性方程组的求解方面，Gauss 制定了一些程序化的消元规则，今日被用到计算机求解之中，被称作 Gauss 消元法。这种方法，实际上也是九章算术中所使用的方法。

线性代数———背景知识

- 在方程个数与未知数个数不同的线性方程组的求解方面，Gauss 制定了一些程序化的消元规则，今日被用到计算机求解之中，被称作 Gauss 消元法。这种方法，实际上也是九章算术中所使用的方法。
- Euler 开创的结构研究，历经许多代数学家，最后由 Frobenius （ 1879 ） 完成的。

线性代数———背景知识

- 在方程个数与未知数个数不同的线性方程组的求解方面，Gauss 制定了一些程序化的消元规则，今日被用到计算机求解之中，被称作 Gauss 消元法。这种方法，实际上也是九章算术中所使用的方法。
- Euler 开创的结构研究，历经许多代数学家，最后由 Frobenius（1879）完成的。
- Frobenius （1879）定义了线性相关、线性无关的概念，矩阵的秩与解的多少的关系。
  其做法与之前的数学家有很大的不同。他的秩的概念很快地被数学界所接受，并被广泛地用于各个数学领域。