多项式概念

定义

设 $n\in\mathbb{N}$，K 是一个数域，x 是一个形式符号（或称未定元）。形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中，$a_0,a_1,\cdots,a_n\in K$，称为数域K 上的一个一元多项式。称其中的 a_ix^i 为第 i次项，称 a_i 为第 i 次项的系数。
当 $a_n\neq 0$ 时，称此多项式为一个 n 次多项式，其次数n 记为 $n=\deg\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)$。

通常，用 $f(x), g(x), \cdots$ 或 $f, g, \cdots$ 来表示多项式。K 上的多项式全体记为 $K[x]$。

- 零次多项式是一个非零常数多项式，每项系数均为零的多项式（即 0 常数多项式）称为零多项式，其次数定义为 $-\infty$。
- 当多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有同次项均相等时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$相等，记为 $f(x)=g(x)$。

- 多项式的运算：多项式的“和”：对应系数相加；“差”：对应的系数相减；“积”：使用分配律并合并同类项。具体如下：

  设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，$g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$，

  $$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{\max\{n,m\}}(a_i\pm b_i)x^i;\ f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=k}a_ib_j\Big)x^k。$$

  次数公式：$\deg(f(x)\pm g(x))\le \max(\deg f(x),\deg g(x))$，$\deg f(x)g(x)=\deg f(x)+\deg g(x)$。

定理（带余除法）

设 $f(x)$, $0 \neq g(x) \in K[x]$，则存在唯一的一对 $q(x)$, $r(x) \in K[x]$，使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

成立，其中 $\deg r(x) < \deg g(x)$。

带余除法中的 $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商，$r(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式。当 $r(x) = 0$ 时，我们称 $g(x)$ 整除 $f(x)$。

定义（整除）

设 $f(x)$, $0 \neq g(x) \in K[x]$，若存在 $q(x) \in K[x]$，使得

$$f(x) = g(x)q(x)$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为“$g(x) \mid f(x)$”。若上面的 $q(x)$ 不存在，则称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，记为“$g(x) \nmid f(x)$”。 当 $g(x) \mid f(x)$ 时，称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式。

推论

设 $f(x)$, $0 \neq g(x) \in K[x]$，则 $g(x) \mid f(x)$ 当且仅当 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零。

整除有下列性质：

命题（整除的性质）

1. 非零多项式 $f(x)$ 整除其自己；
2. 传递性：若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，则 $f(x) \mid h(x)$；
3. 若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$，则 $f(x) = cg(x)$，其中 $0 \neq c \in K$；
4. 若 $f(x) \mid g_i(x)$，$i = 1, 2, \cdots, m$，则
$$f(x) \mid [u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) + \cdots + u_m(x)g_m(x)]$$
其中 $u_i(x) \in K[x]$；
5. 若 $f(x) \mid g(x)$，则 $cf(x) \mid g(x)$，其中 $0 \neq c \in K$。

例

1. 若 $g(x) \mid (f_1(x) + 2f_2(x))$ 且 $g(x) \mid (2f_1(x) + f_2(x))$，
则 $g(x) \mid f_1(x)$，$g(x) \mid f_2(x)$。
2. 求 a，b，使 $x^2 + x + a \mid x^3 + bx + 1$。

定义（公因式）

如果多项式 $d(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，也是 $g(x)$ 的因式，则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个公因式。设 $f(x)$、$g(x)\in K[x]$，不全为零，若 $d(x)\in K[x]$，满足

1. $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式；
2. $f(x)$，$g(x)$ 的公因式都是 $d(x)$ 的因式，即
   若 $d_1(x) \mid f(x) \wedge d_1(x) \mid g(x)$，则 $d_1(x) \mid d(x)$，

则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式。当 $d(x)$ 的首项系数为 1（称为首 1），则记

$$d(x) = (f(x), g(x))。$$

引理

(1) 若 $0 \neq f(x) \mid g(x) \in K[x]$，则 $f(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。(2) 在带余除法 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 公因式集和 $g(x)$ 与 $r(x)$ 公因式集相同。

引理：
(1) 若 $0 \neq f(x) \mid g(x) \in K[x]$，则 $f(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。
(2) 在带余除法 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 公因式集和 $g(x)$ 与 $r(x)$ 公因式集相同。

定理

设 $f(x), g(x) \in K[x]$ 不全为零，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$ 存在，且存在 $u(x), v(x) \in K[x]$，使得

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)。$$

证明：辗转相除法：利用前面引理，当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中有一个整除另一个时，如 $g(x) \mid f(x)$ 时，则 $g(x)$ 为最大公因式，且

$$g(x) = f(x) \times 0 + g(x) \times 1。$$

由引理（2），知道要求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，只需求 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式，且此时 $r(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合；再辗转，用 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的带余除法得余式，如此往复，得到结论。 □

注

最大公因式与数域无关。

定义（互素多项式）

设 $f(x)$，$g(x) \in K[x]$，若 $(f(x), g(x)) = 1$，则称 $f(x)$，$g(x)$ 互素。

定理

$K[x]$ 中两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 互素的充要条件是存在 $u(x), v(x) \in K[x]$，使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1。$$

上述定理是有关两个多项式互素的最重要的关系式。

定理

1. 如果 $(f(x), g(x)) = 1$，且 $f(x)|g(x)h(x)$，则 $f(x)|h(x)$；
2. 如果 $f_1(x)|g(x), f_2(x)|g(x)$，且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$，则 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$；
3. 如果 $(f_1(x), g(x)) = 1$，$(f_2(x), g(x)) = 1$，则 $(f_1(x)f_2(x), g(x)) = 1$。

定义

设 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in K[x]$ 不全为零，$d(x) \in K[x]$ 满足:

1. $d(x) \mid f_i(x)$，$\forall 1 \leq i \leq n$;
2. 如果 $d_1(x) \mid f_i(x)$，$\forall 1 \leq i \leq n$，则 $d_1(x) \mid d(x)$，

则称 $d(x)$ 为 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 的最大公因式，首一的最大公因式记为 $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$。

易知，

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = ((\cdots((f_1(x), f_2(x)), f_3(x)), \ldots), f_n(x))$$

并用归纳法可证存在 $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x) \in K[x]$，使得

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = f_1(x)u_1(x) + f_2(x)u_2(x) + \cdots + f_n(x)u_n(x)。$$

定理（中国剩余定理）

设 $f_1(x),\ldots,f_n(x)\in K[x]$ 两两互素，则对任意给定的 $a_1(x),\ldots,a_n(x)\in K[x]$，必存在 $g(x),q_1(x),\ldots,q_n(x)\in K[x]$，使得

$$g(x)=f_i(x)\,q_i(x)+a_i(x)\text{，（记为}g(x)\equiv a_i(x)\bmod f_i(x)\text{），}i=1,\ldots,n\text{。}$$

证明：$f_i(x)$ 与 $f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x)\cdots f_n(x)$ 互素，所以存在 $u_i(x)$，$v_i(x)$ 使得

$$f_i(x)\,u_i(x)+f_1(x)\cdots f_{i-1}(x)f_{i+1}(x)\cdots f_n(x)\,v_i(x)=1$$

于是对任意的 $1\leq k\leq n$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,v_i(x)\prod_{j\neq i}f_j(x)&=\sum_{i\neq k}^{n}a_i(x)\,v_i(x)\prod_{j\neq i}f_j(x)+a_k(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x)f_{k+1}\\&=\sum_{i\neq k}^{n}a_i(x)\,v_i(x)\prod_{j\neq i}f_j(x)+a_k(x)-f_k(x)\,u_k(x)\text{。}\end{aligned}$$

取 $g(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,v_i(x)\prod_{j\neq i}f_j(x)$ 即可。可知，每个这样的解与给定的 $g(x)$ 相差 $\prod_{i=1}^{n}f_i(x)$ 的倍式

中国剩余定理

公元前后的《孙子算经》中有“物不知数”问题：“今有物不知其数，三三数之余二，五五数之余三，七七数之余二，问物几何？”
答为“233”。也就是求同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 7 \end{cases};$$

明朝程大位用歌谣给出了该题的解法：“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆月正半，除百零五便得知。”

$$(3, 5\times 7) = 1，\ 3\times(-23) + 35\times 2 = 1;$$

$$(5, 21) = 1，\ 5\times(-4) + 21\times 1 = 1;$$

$$(7, 15) = 1，\ 7\times(-2) + 15\times 1 = 1;$$

所以，要求的数是

$$2\times 35\times 2 + 3\times 21\times 1 + 2\times 15\times 1 + 3\times 5\times 7 \times k = 233 + 105k。$$

定义

次数大于或等于 1 的多项式 $p(x) \in K[x]$，若不能表示成 $K[x]$ 中两个次数均比 $p(x)$ 低的多项式之积，则称 $p(x)$ 为数域 K 上的一个不可约多项式。

注

1. 一次多项式总是不可约的；
2. 多项式的可约性与系数域相关，如 x^3-2 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，在 $\mathbb{R}$ 上可约；而 x^2+1 在 $\mathbb{R}$ 上不可约，但在 $\mathbb{C}$ 上是可约的。
3. 设 $p(x)$ 是数域 K 上的不可约多项式，$f(x) \in K[x]$，则 $(p(x), f(x)) \mid p(x)$，而 $p(x)$ 的因式只有常数或 $p(x)$ 的倍式，所以 $(p(x), f(x)) = 1$ 或 $(p(x), f(x)) = cp(x)$，所以有 或是 $p(x)$ 与 $f(x)$ 互素，或是 $p(x) \mid f(x)$；关系只有二者之一。

引理

设 $p(x)$ 是 K 上不可约多项式，如果 $p(x) \mid f(x)g(x)$，则必有 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$。

注

如果不可约多项式 $p(x)$ 整除 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$，是必整除其中之一。

定理（因式分解定理）

数域 K 上次数大于或等于 1 的多项式 $f(x)$ 都分解成一些不可约多项式的乘积；且这种分解式在不计次序时是唯一的。
即：若

$$f(x) = cp_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x) = cq_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x),$$

则必有 $r = s$，且有一个全排列 $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)$，使得

$$p_k(x) = q_{i_k}(x),\ k = 1, 2, \ldots, r。$$

定理（多项式因式分解定理，定理中的分解式称为 $f(x)$ 的准素分解式）

数域 K 上的任一多项式 $f(x)$ 均可分解为

$$f(x) = cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_n^{r_n}(x),$$

其中 $c \in K$，$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x) \in K[x]$ 是互异的首一不可约多项式，$r_1, r_2, \cdots, r_n \in \mathbb{Z}^+$；
若 $0 \neq g(x)$ 是的一个因式，则

$$g(x) = c_1p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_n^{s_n}(x),$$

其中 $c_1 \in K$，$s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}$，$s_i \leq r_i$ $(i = 1, \ldots, n)$。

根据以上定理，我们一般地有

$$\begin{aligned}&\left(c_1p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_n^{r_n}(x),\ c_2p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_n^{s_n}(x)\right)\\ &= p_1^{\min\{r_1,s_1\}}(x)p_2^{\min\{r_2,s_2\}}(x)\cdots p_n^{\min\{r_n,s_n\}}(x)\end{aligned}$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素当且仅当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的分解式中不出现共同的不可约多项式。

重因式

定义（重因式）

设 $p(x), f(x) \in K[x]$，且 $p(x)$ 不可约，
若 $k \in \mathbb{Z}^+$，$p^k(x) \mid f(x)$ 且 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 **k-**重因式。当 $k \geq 2$ 时，称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式。

不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的 k-重因式当且仅当存在多项式 $g(x)$，使得 $f(x) = p^k(x)g(x)$，且 $p(x) \nmid g(x)$。

定理

设 $f(x)$ 在数域 K 上的准素分解为

$f(x) = cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_n^{r_n}(x)$，其中$p_i(x)$ 首一不可、约，$r_i \in \mathbb{Z}^+$；

则

$$(f(x), f'(x)) = p_1^{r_1-1}(x)p_2^{r_2-1}(x)\cdots p_n^{r_n-1}(x)。$$

特别地，$f(x)$ 没有重因式当且仅当 $(f(x), f'(x)) = 1$，
即$f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素。

推论

1. 如果不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 k-重因式（$k \geq 1$），则 $p(x)$ 是 $f(x), f'(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式。
2. 不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的重因式当且仅当 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式。

例

判断多项式
$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$$
有没有重因式。

推论

$f(x)$ 的每个不可约因式出现在 $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 中恰好一次。

多项式函数

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是数域 K 上的多项式，定义函数 $f(x): K \to K$，$\alpha \mapsto a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = f(\alpha)$，这样得到的函数称为 K 上的一个多项式函数。
因为在定义多项式时，x 上代替数参与运算的，所以多项式运算与多项式函数的运算规律相同。

定理（余数定理）

设 $f(x) \in K[x]$，$\alpha \in K$，则存在一个多项式 $q(x) \in K[x]$，使得

$$f(x) = (x - \alpha) q(x) + f(\alpha),$$

即在带余除法中的余项为常数 $f(\alpha)$。

多项式函数

推论

设 $f(x) \in K[x]$，$\alpha \in K$，若 $f(\alpha) = 0$，则称 α 是 $f(x)$ 的根（也称为零点）。α 是 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x-\alpha) \mid f(x)$。

当 $(x-\alpha)$ 是 $f(x)$ 的 k-重因式时，称 α 为 $f(x)$ 的 k-重根。
当 $k=1$ 时，α 称为单根；当 $k>1$ 时，α 称为重根。

定理

数域 K 上的 n 次多项式 $(n \geq 1)$ 的根至多有 n 个，重根按重数计算。

多项式函数

当两个多项式，作为函数相同时，其多项式也相同，这就是下面的定理：

定理（多项式函数决定多项式）

如果多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的次数都不超过 n，且在 $n+1$ 个互异的点上的值相同，则作为多项式有 $f(x)=g(x)$。因此，两个的多项式作为函数相同必有两多项式相同。

定理（Lagrange插值公式）

设 $a_1,\ldots,a_n$ 为数域 K 中互异的数，$b_1,\ldots,b_n\in K$，则存在 K 上唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$，使得 $f(a_i)=b_i$，$i=1,\ldots,n$，该多项式为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1} b_i\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}。$$

复数域是一个代数闭域，含义如下：

定理（代数基本定理）

在复数域 $\mathbb{C}$ 上，每个次数大于零的多项式都至少有一个根。

推论

1. 在复数域 $\mathbb{C}$ 上，不可约多项式都是一次多项式。
2. 复数域 $\mathbb{C}$ 上，多项式都可分解为一次因式的积，即

$$f(x) = c(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是不同的复数，$n_1, n_2, \cdots, n_k \in \mathbb{Z}^+$。
3. 复数域 $\mathbb{C}$ 上，n 次 $(n \geq 1)$ 多项式恰有 n 个根。

例如：在 $\mathbb{C}$ 上，$x^n - 1$ 的 n 个不同的根为 $\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，所以

$$x^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1}\left(x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

设 n 次多项式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 的 n 个根为 $x_1, , \ldots, x_n$，则我们有下列的 Vieta 定理：

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = (-1)^k a_k,\ 1 \le k \le n。$$

定理

三次方程的 Cardan 公式：$x^3 + px + q = 0$ 的解为

$$x_i = \rho_i \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \rho_i^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

这里 ρ_1, ρ_2, ρ_3 为 $w^3 = 1$ 的三个根，$\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$。

4 次多项式求解的 *Ferrari* 公式略。

一点历史

讲起一元多项式的根号求解，不得不提及的数学家有：Abel，Galois，这两个都是早年英逝的数学家（分别不到 27 岁和 21 岁），两人被并称为群论的先驱。

Abel（1802 年 8 月 5 日— 1829 年 4 月 6 日）在（1824 ～ 1826 年），写出了《五次方程代数解法不可能存在》一文，但未被重视。在他去世后第三天，他收到了柏林大学给他的教授聘书。他取得了很多关于椭圆函数的重要成果，也只在他死后才被人们发现并重视。

Galois（1811 年 10 月 25 日— 1832 年 5 月 31 日）12 岁以前，他母亲负责他的教育；12 岁— 16 岁，路易皇家中学就读，各科成绩都很好；16 岁后对数学投入了极大的热，而对于其他科目不再有任何兴趣，校方的描述为“奇特、怪异、有原创力又封闭”。

17 岁时，伽罗瓦将他在代数方程解的结果呈交给法国科学院，由 Cauchy 审阅但被拒绝发表（关于此事有多种说法）。

根据 Gaois 理论，$x^5-x-1=0$ 没有求根公式，而方程 $x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x+1=0$ 有求根公式。原因：$x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x+1=\left(x+x^2+1\right)\left(x^2+x^3+1\right)$.

实系数多项式和有理系数多项式

复数域 $\mathbb{C}$ 上，不可约多项式均是一次的；
实数域$\mathbb{R}$上，x^2+1 是不可约的，而

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 \\ &= \left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) \end{aligned}$$

实系数多项式和有理系数多项式

复数域 $\mathbb{C}$ 上，不可约多项式均是一次的；
实数域$\mathbb{R}$上，x^2+1 是不可约的，而

$$
\begin{aligned}
x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 \\
&= \left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)
\end{aligned}
$$

我们经常说，实系数上多项式的虚根总是成对出现，这实际上也决定了实数域上不可约多项式只能是 1 次或 2 次的。

定理

1. $\mathbb{R}$ 上不可约多项式只能是一次或二次的；
2. $\mathbb{R}$ 上一个二次多项式不可约当且仅当其判别式为负数；
3. $\mathbb{R}$ 上的非常数多项式必可分解为 $\mathbb{R}$ 上一次式与二次式的积。

所以，实系数多项式的标准分解式为

$$
f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}(x-c_2)^{l_2}\cdots(x-c_r)^{l_r}(x^2+a_1x+b_1)^{k_1}\cdots(x^2+a_sx+b_s)^{k_s}
$$

其中 $c_1,\cdots,c_r,a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_s\in\mathbb{R}$，$l_1,l_2,\cdots,l_r$；$k_1,\cdots,k_s\in\mathbb{Z}^+$ 且 $a_i^2-4b_i<0, i=1,2,\cdots,s$.
这一点在我们的有理函数的积分计算中已经用到过。

在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上，情况有些不同！如 $x^n-2\ (n>1)$ 是一个不可约的多项式。由于有限个有理数或取成同一个公分母，所以 $\mathbb{Q}$ 上的多项式的分解问题最终或化为整数环上的多项式的分解问题。

例

如 $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}=\frac{1}{30}(45x^2+6x-20)$，所以多项式 $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{2}{3}$ 的根与 $45x^2+6x-20$ 的根相同。两个多项式在有理数域上可分解性也是一样的。

在讨论有理根或是有理系数分解时，整系数多项式比有理系数多项式更加容易处理。

定理

设有理数 $\frac{q}{p}$ （其中 $p,0\neq q\in\mathbb{Z}$，$(p,q)=1$ ）是整系数多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的根，则必有 $q\mid a_0$ 且 $p\mid a_n$。

对于整系数多项式在有理数域上的分解，等价的处理方式是在整数范围（形成环的概念），而不是到更广的范围—有理数域上去处理。于是衍生出下下列定义。

定义

一个非零的整系数多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，若最大公约数 $(a_n,a_{n-1},\cdots,a_0)=1$，则称这个多项式为本原的。

任一多项式均可唯一地（在不计正负号的情况下）写成一个有理数与一个本原多项式的乘积。

定理

1. (Gauss) 两个本原多项式的乘积还是本原多项式;
2. 一个非零整系数多项式若是两个次数更低的有理系数多项式之积，则必是两个次数较低的整系数多项式之积。

例

证明多项式 $f(x) = x^3 - 4x + 7$ 是有理数域上的不可约多项式。

定理 (Eisenstein 判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 是一个整系数多项式。如果存在一个素数 p，满足

1. $p \nmid a_n$;
2. $p \mid a_{n-1}$，$p \mid a_{n-2}$，$\cdots$，$p \mid a_0$;
3. $p^2 \nmid a_0$

则多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

例

1. $f(x)=x^n+2$，总是在有理数域上不可约，$n\in\mathbb{Z}^+$；
2. 多项式 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$（其中$p$ 是一个素数，这个多项式被称为分圆多项式）也在有理数域上不可约；

设 $x_1, , \ldots, x_n$ 为独立变量，K 是一个数域，则由 K 中的元素、$x_1, \ldots, x_n$ 经过有限次加、减、乘法运算得到的表达式称为 $x_1, \ldots, x_n$ 的多项式，当一个多项式中涉及的运算只有乘法时，则称为一个单项式。一个单项式总可以写成为 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$，其中 $a \in K$，$0 \le i_1, i_2, \ldots, i_n < +\infty$。

- 倒字典序：两个非零单项式 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 和 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$，称 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 先于 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ （记作 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \prec bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ ），如果存在 $1 \le k \le n$，使得 $i_1 = j_1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}, i_k > j_k$;
- 称 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \preceq bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$，如果 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \prec bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ 或 $i_r = j_r$ 对所有的 $1 \le r \le n$ 都成立。我们仍称此时 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 先于 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$;
- 先于关系是一种类全序关系；（有自反性，传递性，但反对称性在相差一个系数的情况下存在）；
- 乘法保持先于关系，类似于数中，两个大的数之和总不小于两个小的数的和;

命题

本命题中的多项式是多元多项式。

1. 两个非零多项式这种仍非零;
2. 一个多项式如果作为函数为常值零函数当且仅当它是零多项式;
3. 两个多项式相等当且仅当作为函数相同。

对称多项式

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 n 个变量，如果
令 $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$，则 $f(x)$ 是变量 x 的 n 次多项式，合并同类项整理得，

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x + (-1)^n \sigma_n,$$

其中

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;\\
&\sigma_2 = x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma_{n-1} = x_1x_2 \cdots x_{n-1} + x_1x_3 \cdots x_n + \cdots + x_2x_3 \cdots x_n;\\
&\sigma_n = x_1x_2 \cdots x_n;
\end{aligned}$$

可以看出，$\sigma_k\ (1 \le k \le n)$ 是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的多项式，且有 $\sigma_k(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_n) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i \ldots, x_n)$，也就是说，互换 σ_i 的变量的任何位置，其值不变。$\sum_{i=1}^n x_i^2$ 也是这样一个多项式。

定义

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 n 个变量，若 n 元多项式 $\sigma(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_n) = \sigma(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i \ldots, x_n)$ 对任意的 $1 \le i < j \le n$ 成立，则称 σ 为变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的一个对称多项式。

定理

变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的任何一个对称多项式均可写成 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ 的多项式。

在证明前，先看几个改写的例子：

例

$n = 3$: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2 = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$，所以 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$;

$$
\begin{aligned}
x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 \\
&- 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) + 9x_1x_2x_3
\end{aligned}
$$

上面的例子可以看出，$\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ 是以 $x_1, \ldots, x_n$ 为未定元的对称多项式，它们都是 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 的表达式。它们之间更深层次的关系可由下面的 Newton 公式来描述。

命题

记 $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$，则

1. 当 $k \geq n$ 时，有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} s_{k-n+1} + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0;$$

2. 当 $k < n$ 时，有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0.$$

结式和判别式

两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不是互素，可以用辗转相除法来求出其最小公因式来确定。但一种更简便的方法是对其系数进行行列式运算来判定。这个判定法则的依据是如下的引理。

引理

设 $f(x)$，$g(x) \in K[x]$ 为非常数多项式，则 $f(x)$，$g(x)$ 不互素的充分必要条件是存在非零的 $u(x), v(x) \in K[x]$，使得

$$f(x)u(x) = g(x)v(x)\text{，其中} \deg u < \deg g,\ \deg v < \deg f\text{。}$$

定义

设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$，$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$，则定义

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式。

定义

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$，则定义

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式。

定理

设 $f(x)$，$g(x)\in K[x]$ 为非常数多项式，则 $f(x)$，$g(x)$ 互素（没有公共根）当且仅当 $R(f,g)\neq 0$。

定理

设 $f(x)$，$g(x) \in K[x]$ 分别为 n 次、m 次非常数多项式，并设 $f(x)$，$g(x)$ 的根分别为 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_m$，则

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (x_j - y_i)$$，其中a_0、b_0分别为f和g的首项系数。

定理

设 $f(x)$，$g(x) \in K[x]$ 分别为 n 次、m 次非常数多项式，并
设 $f(x)$，$g(x)$ 的根分别为 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_m$，则

$$R(f,g) = a_0^m b_0^n \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (x_j - y_i)$$，其中a_0、b_0分别为f和g的首项系数。

定理

设 $f(x) \in K[x]$ 为 n 次多项式，首项系数为 a_0，定义f 的判别式为

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_0^{-1} R(f, f'),$$

则有

$$\Delta(f) = a_0^{2n-2} \prod_{1 \le j < i \le n} (x_j - x_i)^2$$，其中$x_1, \ldots, x_n$为f的n个根。