高等代数（上海市精品课程，制作人：朱胜林，mazhusl@fudan.edu.cn ）

朱胜林

第十章
双线性型

我的信息

朱胜林

办公室:	光华东楼 1708
办公电话:	55664896
办公时间:	周二下午 1：30 — 3：30
电子邮件:	mazhusl@fudan.edu.cn
个人主页:	homepage.fudan.edu.cn/~zhusl
本课程主页:	jpkc.fudan.edu.cn/s/100/

对偶空间

定义（线性函数）

设 V 是数域 K 上的一个线性空间，则 V 到 K 的一个线性映射称为一个线性函数。

例

（1）根据线性映射与矩阵的对应关系，K^n 上的任一线性函数 f 对应于一组数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n。$$

（2）迹函数 $\mathrm{tr} : A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ 是 K 上 $n \times n$ 矩阵构成的线性空间 $M_{n\times n}(K)$ 上的一个线性函数。
（3）如果 $V = K[x]$ 是 K 上的多项式全体构成的线性空间，$a \in K$。定义

$$f_a(p(x)) = p(a), \forall p(x) \in K[x],$$

则此取值运算也是一个线性函数。

根据线性的定义，一个线性函数完全有一组基下的值确定。也就是说，可以给定基下的值（所取值不作任意要求）来确定一个线性函数。

两个线性函数的和函数、一个线性函数与一个数的积都还是线性函数，所以 V 上的线性函数全体也构成一个线性空间。

定义

线性空间 V 上的线性函数全体构成一个线性空间，记为 V^*，称作 V 的对偶空间。

如果 $v_1,\ldots,v_n$ 是 V 的一组基，则满足下列条件的线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，

$$f_i(v_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}=\delta_{ij}$$

称为 $v_1,\ldots,v_n$ 的一组对偶基。

之所以称作对偶基：如果 $v=k_1v_1+\cdots+k_nv_n$，则 $f_i(v)=k_i$，有

$$v=\sum_{i=1}^{n}k_iv_i=\sum_{i=1}^{n}f_i(v)\,v_i,$$

反之，

若 $f\in V^*$，$f(v)=f\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(v)\,v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f_i(v)f(v_i)=\left(\sum_{i=1}^{n}f(v_i)f_i\right)(v)$，所以有 $f=\sum_{i=1}^{n}f(v_i)f_i$ 是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的线性组合，线性无关性容易验证。$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 构成 V^* 的一组基。

对偶空间

例

设 $V=K[x]_{n-1}$ 为 K 上次数小于 n 的多项式全体构成的线性空间，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 K 中的 n 个互异数值，则在这 n 个点的取值函数

$$f_i\left(p\left(x\right)\right)=p\left(a_i\right),\ 1\le i\le n$$

是线性无关的（通过vonde Monde 行列式证明）。$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 构成 V^* 的一组基，它是 Lagrange 插值多项式

$$p_i(x)=\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)},i=1,2,\cdots,n.$$

的对偶基。

为了引出下节的双线性型，我们记 $f\left(x\right)=\langle f,x\rangle$，这里 $x\in V$，$f\in V^*$。

对偶空间

如果 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$，则定义 $\varphi^* \in \mathcal{L}(V^*)$：$\varphi^*(f) = f\varphi = f \circ \varphi$，它是线性函数与线性映射的复合，所以还是线性函数。且对 $\alpha, \beta \in K$，$f, g \in V^*$，

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)\varphi = \alpha f\varphi + \beta g\varphi = \alpha\varphi^*(f) + \beta\varphi^*(g),$$

所以 $\varphi^* \in \mathcal{L}(V^*)$。

$$\langle f, \varphi(x)\rangle = f(\varphi(x)) = (f \circ \varphi)(x) = \varphi^*(f)(x) = \langle \varphi^*(f), x\rangle。$$

如果 φ 在一组基 $v_1, \ldots, v_n$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，则有 $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$；设 $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ 为相应的对偶基，则有

$$\begin{aligned}
\varphi^*(f_k) &= \sum_{j=1}^n \langle \varphi^*(f_k), v_j\rangle f_j = \sum_{j=1}^n \langle f_k\varphi, v_j\rangle f_j = \sum_{j=1}^n \langle f_k, \varphi(v_j)\rangle f_j \\
&= \sum_{j=1}^n \left\langle f_k, \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i \right\rangle f_j = \sum_{j=1}^n a_{kj}f_j,
\end{aligned}$$

所以 φ^* 在 $f_1, \ldots, f_n$ 下对应的矩阵为 A'。

对偶空间

设 V 是 K 上一个线性空间，V^* 是其对偶空间，取定 V 中一个向量 x，定义 V^* 的一个函数 x^{**} 如下：

$$x^{**}(f) = f(x), f \in V^*。$$

容易验证 x^{**} 是 V^* 上的一个线性函数，因此是 V^* 的对偶空间 $(V^*)^* = V^{**}$ 中的一个元素，映射 $x \mapsto x^{**}$ 是一个单射，则维数相同，知映射 $x \mapsto x^{**}$ 构成 V 到V^{**} 的一个线性同构。
有时，人们为方便记，在 $\dim V$ 有限时会把空间 V^{**} 和 V 作一个等同，也就是，把 V^{**} 中的元素 x^{**} 看成 V 中映射到的元素 x。从这个角度看，V 和 V^* 就是互为线性函数空间，这就是为什么人们将之叫作对偶空间的缘故。
注意，这种等同关系只有有限维空间时才有，当 V 为无限维空间时，$x \mapsto x^{**}$ 只能是一个单射，从来不能会是一个满射。

双线性型

定义

设 U, V 是数域 K 上的线性空间，$g : U \times V \to K$ 是一个映射，满足 $g(u, -) : V \to K$ 和 $g(-, v) : U \to K$ 对任意的 $u \in U$ 和 $v \in V$ 都是线性映射，由称 g 是一个双线性型。这里，$g(u, -)(v) = g(u, v)$；$g(-, v)(u) = g(u, v)$。

如同线性函数，双线性型也是由它们的基来确定。
设 $u_1, \ldots, u_m$ 是 U 的一组基，$v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的一组基，$U \ni u = k_1u_1 + \cdots + k_mu_m$，$V \ni v = l_1v_1 + \cdots + l_nv_n$，则

$$
\begin{aligned}
g(u, v) &= g\left(\sum_{i=1}^{m} k_i u_i, \sum_{j=1}^{n} l_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k_i g(u_i, v_j)\, l_j \\
&= \left([u]_{u's}\right)' \left(g(u_i, v_j)\right) [v]_{v's}\text{。}
\end{aligned}
$$

$g \mapsto \left(g(u_i, v_j)\right)_{m\times n}$ 构成所有双线性型空间到 K 上 $m \times n$ 矩阵空间的一个双射。

双线性型

如果 $\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_m$ 是 U 的另一组基，$\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n$ 是 V 的另一组基，$C=(C_1,\ldots,C_m)$ 和 $D=(D_1,\ldots,D_n)$ 分别是从 $u_1,\ldots,u_m$ 到 $\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_m$、从 $v_1,\ldots,v_n$ 到 $\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n$ 的过渡矩阵，则有

$$[\tilde{u}_i]_{u's}=C_i,\ [\tilde{v}_j]_{u's}=D_j,$$

于是有

$$\begin{aligned} g\left(\tilde{u}_i,\tilde{v}_j\right) &= \left([\tilde{u}_i]_{u's}\right)'\left(g\left(u_i,v_j\right)\right)\left[\tilde{v}_j\right]_{v's}=C_i'\left(g\left(u_i,v_j\right)\right)D_j,\\ \left(g\left(\tilde{u}_i,\tilde{v}_j\right)\right)_{m\times n} &= C'\left(g\left(u_i,v_j\right)\right)_{m\times n}D, \end{aligned}$$

也就是说，在不同的基下，矩阵是相抵关系。

由于矩阵 $\left(g\left(u_i,v_j\right)\right)_{m\times n}$ 相抵于标准型 $\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

双线性型

定理

设 g 是 U 和 V 上的一个双线性型，则必存在 $u_1,\ldots,u_m$ 是 U 的一组基，$v_1,\ldots,v_n$ 是 V 的一组基，及一个非负整数 $r\le\min(m,n)$，使得

$$g(u_i,v_j)=\begin{cases}\delta_{ij}, & 1\le i,j\le r;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}。$$

此时，易知 $L=\{u\in U\mid g(u,v)=0,\forall v\in V\}=\mathcal{L}(u_{r+1},\ldots,u_m)$，$R=\{v\in V\mid g(u,v)=0,\forall u\in U\}=\mathcal{L}(v_{r+1},\ldots,v_n)$。分别称 L 和 R 为 g 的左根子空间和右根子空间，称 r 为 g 的秩。

显然，$\dim L=m-r$，$\dim R=n-r$。

当 $L=R=\{0\}$ 时，称 g 为一个非退化双线性型，此时有 $m=n$ 为 g 的秩。也就是说，g 在一组基下对应的矩阵的秩等于其行数，也等于其列数，即可逆。