高等代数（上海市精品课程，制作人：朱胜林，mazhusl@fudan.edu.cn ）

朱胜林

第六章
特征值

我的信息

朱胜林

办公室:	光华东楼 1708
办公电话:	55664896
办公时间:	周二下午 1：30 — 3：30
电子邮件:	mazhusl@fudan.edu.cn
个人主页:	homepage.fudan.edu.cn/~zhusl
本课程主页:	jpkc.fudan.edu.cn/s/100/

设 K 是一个数域，$\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 是一个线性变换，φ 的不变子空间往往在 φ 的作用中起着很重要的作用。尤其是它的 1 维的不变子空间。

定义 (特征值和特征向量)

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$，若 $\lambda \in K$，$0 \neq x \in V$，使得 $\varphi(x) = \lambda x$，则称 λ 为 φ 的一个特征值，x 为 φ 的对应于特征值 λ 的一个特征向量。

$E_\lambda = \{x \mid \varphi(x) = \lambda x\}$ 是 V 的一个子空间，称为 φ 的对应于特征值 λ 的特征子空间。

设 A 是一个 $n \times n$-矩阵，若 $\lambda \in \mathbb{C}$，$0 \neq x \in \mathbb{C}_n$，成立 $Ax = \lambda x$，则称 λ 为 A 的一个特征值，x 为 A 的对应于特征值 λ 的一个特征向量。

此时 $E_\lambda = \{x \mid Ax = \lambda x\}$ 也是 K_n 的一个子空间，称为 A 的对应于特征值 λ 的特征子空间。

注

矩阵的特征值可以是一个复数，而数域 K 上线性变换 φ 的特征向量一定是 K 中的数。

如果线性变换 $\varphi: V \to V$ 在 V 的一组基 $v_1, \ldots, v_n$ 下的矩阵为 A，$v \in V$，且 $v = (v_1, \ldots, v_n)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$，则有 $\varphi(x) = (v_1, \ldots, v_n)A\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$，于是有 $\varphi(x) = \lambda x$ 当且仅当 $A\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$，所以，线性变换的特征值问题可化为相应矩阵的特征值问题。

现设 A 是一个 n 阶方阵，λ 是 A 的一个特征值，则存在一个特征向量 $0 \neq x \in K_n$，使得

$$Ax = \lambda x,$$

于是有 $\lambda I_n - A)x = 0$，由于 $x \neq 0$ 是所给出齐次方程组的非零解，故而有 $\det(\lambda I_n - A) = 0$；反过来，若 $\det(\lambda I_n - A) = 0$，则 $\lambda I_n - A)x = 0$ 有非零解 x，根据定义，知 λ 是 A 的一个特征值。

关于矩阵的特征值，我们有下列的性质。

定理

设 A 为一个 n 阶方阵。则

1. $\lambda \in K$ 是 A 的特征值的充分必要条件为 $\det(\lambda I_n - A) = 0$;
2. 上（下）三角矩阵的特征值为其对角元全体;
3. 相似的矩阵有相同的特征值;
4. K 上 λ 的多项式 $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$ 为 n 次多项式，其中 x^k 前的系数为<u>A 的所有 $n-k$-阶主子式的和</u>$\times (-1)^{n-k}$;
5. A 的特征值（重数计算在内）恰有 n 个，如果记为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，则有
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{trace}(A), \quad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det A;$$
6. 不同特征值的特征向量线性无关，所有不同的特征子空间的和为直和。

定理 (Schur 定理)

任一个 n 阶方阵在复数域 $\mathbb{C}$ 上必相似于一个上三角阵。

证明：归纳法，当 $n=1$ 时，自然成立。
设 A 是一个 n 阶方阵（$n>1$）。则 A 在 $\mathbb{C}$ 上必有特征值 λ_1 和相应的特征向量 v_1。扩充 $\{v_1\}$ 为 $\mathbb{C}_n$ 的一组基 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，则有

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \sum_{j=1}^{n} b_{j2} v_j, \ldots, Av_n = \sum_{j=1}^{n} b_{jn} v_j;$$

以矩阵记之

得 $A\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$,

记 $B = \left(b_{i-1\,j-1}\right)_{(n-1)\times(n-1)}$。由归纳假设，存在可逆矩阵 Q，使得 $Q^{-1}BQ$ 为上三角阵，于是有

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & Q^{-1}BQ \end{pmatrix}$$

为上三角阵。 □

例

1. 设 P 和 A 是同阶方阵且 P 可逆。
   则 $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^kP$，所以
   $$f\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}f(A)P\text{，对任一个多项式}f(x)\text{成立。}$$
2. 设 λ 是 A 的特征值
   1. $f(x)$ 是多项式，则 $f(\lambda)$ 必是 $f(A)$ 的特征值；
   2. 当 A 可逆时，λ^m 必是 A^m 的特征值，$\forall m \in \mathbb{Z}$；
   3. $\forall \mu \in K$，$\mu\lambda$ 是 μA 的特征值。

例

1. 设 V 为 K 上的有限维线性空间，φ、ψ 为乘法可换的线性变换，则 φ 的任一特征子空间必为 ψ 的不变子空间；
2. 与对角元互异的对角阵互换的矩阵必也为对角阵；
3. 设 A、B 为 n 阶方阵，且 $AB = BA$，证明 A、B 在复数域上必有相同的特征向量；
4. 设 V 为 $\mathbb{C}$ 上的有限维线性空间，$\{\varphi_i \mid i \in I\}$ 为 V 上两两乘法互换的线性变换集（ I 可以是无限集），则 $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ 必存在公共的特征向量。

前面知道，数域 K 一个方阵的不同特征值的特征向量是线性无关的，换句话说，方阵的特征子空间的和是直和。当特征子空间的和构成整个 K_n 时，这个矩阵与对角阵相似。

定义

设 A 是数域 K 上的一个 n 阶方阵，若存在 K 上一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，则称 A 在数域 K 上可对角化。

如上定义，当 $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 时，若
记 $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$，则有

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{pmatrix} \\ P\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以，有 $Av_i = \lambda_i v_i \ (1 \le i \le n)$，所以得到 A 有 n 个线性无关的特征向量。

定理

数域 K 上方阵 A 在 K 上可对角化的充要条件为 A 在 K 上存在 n 个线性无关的特征向量。

若记 $|\lambda I_n - A| = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$，这里 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 互异，则 λ_i 为 A 的特征值，且称 n_i 为 λ_i 的代数重数，称 $\dim E_{\lambda_i}$ 为 λ_i 的几何重数。

根据Schur定理，知存在 $\mathbb{C}$ 上可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为上三角阵；
通过计算 $|\lambda I_n - A|$，知 λ_i 在对角线上恰出现了 n_i 次；
而 $P^{-1}(\lambda_i I_n - A)P = \lambda_i I_n - P^{-1}AP$ 是一个上三角阵，其对角线上有 $n-n_i$ 个非零数，所以至少有一个 $n-n_i$ 阶非零子式，于是知 $\operatorname{rank}(\lambda_i I_n - A) \geq n-n_i$，于是其解空间 $E_{\lambda_i} = \{x \mid (\lambda_i I_n - A)x = 0\}$ 的维数（几何重数）必不大于 n_i。

定理

设 A 为 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵，则

1. 若 λ 为 A 的一个特征值，则 λ 的几何重数不大于其代数重数；
2. A 可对角化当且仅当它的每个特征值的代数重数与其几何重数相等；
3. A 可对角化当且仅当对它的每个特征值 λ，$\operatorname{rank}(\lambda I_n - A) = n - (\lambda\text{的代数重数})$。

推论

1. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的具有 n 个互异特征值的线性变换，则在 V 上存在一组基，在这组基下 φ 的矩阵为对角阵。
2. 线性空间 V 线性变换在一组基下的矩阵是对角阵的充要条件是 V 是 φ 的特征子空间的直和。

例

设 $A=\begin{pmatrix} -1 & h & 0 \\ 2h+2 & 0 & -2 \\ 0 & -h^2-h & 1 \end{pmatrix}$
当参数 h 为何值时，A 必可相似于一个对角阵，并求这样一个可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

解： A 的特征多项式为 $\lambda^3+\left(-4h^2-4h-1\right)\lambda=\lambda\left(\lambda+(2h+1)\right)\left(\lambda-2h-1\right)$，所以特征值为 $0,\pm(2h+1)$。当三者都不相同时，即 $h\neq-\dfrac{1}{2}$ 时，矩阵有三个不同的特征值，所以可对角化；当三个中有两个相同时，得到 $h=-\dfrac{1}{2}$；这时三个特征值为 0，若可以对角化，必相似于全零对角矩阵，从而得到 A 为零，与 A 不为零矩阵矛盾。P 的求法略。

Cayley-Hamilton 定理和极小多项式

定理 (Cayley-Hamilton 定理)

设 A 是数域 K 上的 n 阶方阵，$f(x)=|xI_n-A|$，则 $f(A)=0$。

证明：$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_0$，并设 $(xI_n-A)^*=x^{n-1}B_0+x^{n-2}B_1+\cdots+xB_{n-2}+B_{n-1}$，$(xI_n-A)(xI_n-A)^*=f(x)I_n$，并比较系数矩阵得到结论。 □

所以 $|xI_n-A|$ 是以 A 为根的多项式，这样的多项式还有很多，这其中次数最低且首一的多项式称为 A 的**极小多项式**。

命题

1. 方阵 A 的极小多项式是唯一的；
2. 如果 $m(x)$ 是方阵 A 的极小多项式，且 $f(x)\in K[x]$，$f(A)=0$，则 $m(x)\mid f(x)$；
3. 方阵 A 的极小多项式 $m(x)\mid |xI_n-A|$。

例

1. 数乘矩阵 λI_n 的极小多项式为 $x-\lambda$；反之，若 A 的极小多项式是为 $x-a$，则 $A=aI_n$；
2. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}$ 的极小多项式为 $(x-a)^2$；
3. $\begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & b \end{pmatrix}$ 的极小多项式在 $a \neq b$ 时为 $(x-a)^2(x-b)$，在 $a=b$ 时为 $(x-a)^2$。

最小多项式有如下性质：

定理

设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 为 A 的所有互异的特征值，$m(x)$ 为 A 的极小多项式，则

$$(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k) \mid m(x) \mid \det(xI_n-A)\text{。}$$

定理 (戈氏圆盘定理)

设 A 是 n 阶复方阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 A 的任一特征值必在下列 n 个圆盘

$$|z-a_{ii}|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=|a_{i1}|+\cdots+|a_{i\,i-1}|+|a_{i\,i+1}|+\cdots+|a_{i\,n}|$$

$(1\le i\le n)$ 中的一个之中。

例 (严格对角占优阵必是可逆阵)

设 A 是 n 阶复方阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若 $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ 对所有 $(1\le i\le n)$ 都成立，则 A 必可逆。

定理

设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个戈氏圆盘连成的若干连通区域，每个连通区域中含有的 A 的特征值的个数与这个区域中圆盘的个数相同。

例 (某个圆盘中可能没有特征值)

设 $A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$，$|\lambda I_2 - A| = \lambda^2 - 1$，特征值 ± 1 不在圆盘 $|z-2| \le \frac{1}{2}$ 中。大家也可自己计算 $A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$，此时一个圆盘中没有特征值，且两个圆盘没有包含关系。