高等代数（上海市精品课程，制作人：朱胜林，mazhusl@fudan.edu.cn ）

朱胜林

第八章 二次型

我的信息

朱胜林

办公室:	光华东楼 1708
办公电话:	55664896
办公时间:	周二下午 1：30 — 3：30
电子邮件:	mazhusl@fudan.edu.cn
个人主页:	homepage.fudan.edu.cn/~zhusl
本课程主页:	jpkc.fudan.edu.cn/s/100/

二次型及其矩阵表示

平面上的一条曲线的形状由其纯二次部分确定。

定义（二次型）

数域 K 上的关于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\ &\quad +a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ &\quad +\cdots+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 K 上的一个二次型。

例

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，$x=(x_1,\ldots,x_n)'$，
则 $x'Ax=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}^n \left(a_{ij}+a_{ji}\right)x_ix_j$。

二次型及其矩阵表示

当数域 K 为实数域时，若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为一个二次型，在所有满足 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$ 的矩阵 A 中，我们取一个实对称矩阵，称为这个二次型所对应的（实对称）矩阵。即把 x_i^2 前的系数置于 (i,i)-项上，将 x_ix_j 前的系数各取一半分别置于 (i,j)-项和(j,i)-项（$i\neq j$ 时），这样得到的矩阵就是该二次型的矩阵。这样二次型与其矩阵是相互唯一决定的。

设 $x'Ax$ 为二次型，$P=(b_{ij})_{n\times n}$ 为一个可逆阵，则在变换 $P^{-1}x=y$, 或等价地，$(x=Py)$ 下

$$x'Ax=(Py)'APy=y'\left(P'AP\right)y;$$

所以看成 $y_1,\ldots,y_n$ 的二次型，原二次型所对应的矩阵变为 $P'AP$（仍为实对称矩阵）。

定义（合同关系）

设 A、B 为实对称矩阵，且存在一个可逆矩阵 P，使得 $P'AP=B$，则称矩阵 A、B 合同。

二次型及其矩阵表示

合同是对称矩阵之间的一个关系，具有：

1. 自反性：任意实对称矩阵 A，都有 A 与自身合同；
2. 对称性：如果实对称矩阵 A 与 B 合同，则 B 与 A 合同；
3. 传递性：如果实对称矩阵 A 与 B 合同，B 与 C 合同，则 A 与 C 合同。

所以，二次型经过可逆的线性变换后，新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的。
在涉及几何形状时，我们讨论的二次型的变换一般取正交变换。从几何观点上来看，这样的变换是保持长度、角度，因此保持几何形态的变换。

二次型的化简

在讨论一个二次曲线或二次曲面时，如果想知道它的形状，需要把其二次部分（二次型）化成无交叉项的形式。

定义 (二次型的标准型、规范型)

设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$ 经由线性变换 $x=Py$，这里 P 是一个可逆矩阵，化为

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2,$$

则称 $.d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个标准型，若标准型中的 d_i 取值为 ±1 和 0，则称之为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范型。

化二次型为标准型的过程，实际上就是在一个实对称矩阵的合同矩阵中找一个对角阵的过程。

定理

任意一个对称矩阵都合同于一对角矩阵。

二次型的化简

化二次型为标准型的方法一般有三种，(1) 配方法，(2) 初等变换法，(3) 正交相似法。
配方法在处理简单的例子时可以采用，但更常用的方法是初等变换法。
做法的程序化规则如下（设 A 是要合同对角化的 n 阶对称阵）：

1. 将 A 和 I_n 并列，形成一个 $n\times(2n)$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$，
2. 对该矩阵实施类似于求阶梯形的初等行变换，要点：实施一次初等行变换后，在对其实施下一次初等行变换前，先对矩阵的前 n 列实施一次相应的初等列变换；
3. 最后当矩阵 $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ 经过这样的成对的初等变换后若化成 $\begin{pmatrix} B & Q \end{pmatrix}$，其中 B 为一个对角阵，则取 $P=Q'$，有 $P'AQ=B$ 为对角阵！

例

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $y_1^2+y_2^2$ 且 Q 的第三列为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$。求矩阵 A 并证明 $A+E$ 正定。

证明：Q 的其它两列均对应到特征值 1，第三列对应到特征值 0，所以相互正交，于是前两列可通过解 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x=0$ 得到，解得

$$c_1(0,1,0)'+c_2(-1,0,1)',$$

标准正交化后有，记 $Q=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$，则 $AQ=Q\,\mathrm{diag}(1,1,0)$，

所以 $A=Q\,\mathrm{diag}(1,1,0)\,Q'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$。 □

惯性定理

因为矩阵左右乘一个可逆矩阵的秩不变，所以化成标准型后对角元的非零项个数等于原矩阵的秩，这个数不依赖于合同矩阵的选取。
不仅如此，在实数域上，对角元中正数的个数也是不变的（不依赖于合同实阵的选取），这一点就称为二次型的惯性定理。

定理（惯性定理）

$\mathbb{R}$ 上的一个二次型，总可以经过合同变换化为规范型，并且两个不同合同变换所得到的规范型中的正系数（负系数、零系数）的个数相同。

称一个实二次型的规范型中正系数的个数为其正惯性指数，负系数的个数为其负惯性指数，正负惯性指数之差称为符号差。
由于有 $\sqrt{-1}=i$ 的存在，复数域上的二次型的规范型中只有系数 1 和 0 出现，惯性定理变为系数 1 的个数不依赖于使用的变换。

惯性定理

例

设 $f(x) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$；

1. 求 f 的矩阵的所有特征值；
2. 若 f 的标准型为 $y_1^2 + y_2^2$，求 a。

解： 对应的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$，$\det(A - \lambda I_3) =$
$-(\lambda - a - 1)(\lambda - a)(\lambda - a + 2) = 0$，解得 λ 的值
为 $a - 2 < a < a + 1$。如果标准型为 $y_1^2 + y_2^2$，则特征值必为一个零，两个正值，于是有 $a = 2$。 □

例

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$，其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12。

1. 求 a,b 的值；
2. 利用正交交换将二次型 f 化为标准型，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵。

解： 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，所以有 $\left\{\begin{array}{c} \det A=-2b^2-4a=-12 \\ a=tr(A)=1 \end{array}\right.$，所以有 $a=1$，$b=2$，此时 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，特征向量 $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 2,\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow -3$，于是可取 $Q=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$，此时有 $Q^TAQ=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$。 □

正定二次型

在数学分析、微积分中讨论极值点时，经常遇到一点的去心邻域中的值总大于（小于）零的情况，这在二次型中专门有一个名称—正定。

定义（正定、负定、半正定、半负定二次型（矩阵））

实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x'Ax$，

1. 如果对所有的非零实向量 x，均有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，则称 f 正定；
2. 如果对所有的非零实向量 x，均有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)<0$，则称 f 负定；
3. 如果对所有的非零实向量 x，均有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0$，则称 f 半正定；
4. 如果对所有的非零实向量 x，均有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leq 0$，则称 f 半负定；
5. 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 即不是半正定的，也不是半负定的，则称 f 不定型。

相应的实对称矩阵 A 分别称为正定、负定、半正定、半负定、和不定型的。

二次型的正定、负定、半正定、半负定、和不定型，分别对应于其标准型的系数全为正、全为负、全为非负数、全为非正数、和有正有负。

正定二次型

定义

设 A 是一个 n 阶矩阵。$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$，则称 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 为 A 的一个 k 阶主子式，$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$ 称为 A 的 k 阶顺序主子式。

定理（正定矩阵的等价条件）

设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$，则下列等价：

1. 二次型 $x'Ax$ 正定；
2. 二次型 $x'Ax$ 的规范型为 $y_1^2 + \cdots + y_n^2$；
3. A 的特征值均大于零；
4. A 的主子式均大于零；
5. A 的顺序主子式均大于零；
6. 存在一个对角元均大于零的下三角矩阵 L，使得 $A = LL'$。这样的 L 还是唯一的，表达式 $A = LL'$ 称为 A 的 Cholesky 分解。

定理 (半正定等价条件)

设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x'Ax$，则下列等价：

1. 二次型 $x'Ax$ 半正定；
2. 二次型 $x'Ax$ 的规范型为 $y_1^2 + \cdots + y_r^2$；
3. A 的特征值均大于或等于零；
4. A 的主子式均大于或等于零；
5. 存在一个实阵 C，使得 $A = C'C$。

正定二次型

例

1. 设 A 为（半）正定矩阵，则对任意的 $k \in \mathbb{Z}^+$，存在唯一的（半）正定矩阵 B，使得 $B^k = A$，记为 $B = \sqrt[k]{A}$；
2. 设 n 阶矩阵 A 正定，B 实对称，则存在一个可逆实阵 P，使得 $P'AP$、$P'BP$ 同时为对角阵；
3. 设 n 阶矩阵 A 正定，B 实对称，则 AB 的特征值均为实数，且其中正值的个数、负值的个数分别等于 B 的正、负惯性指数；
4. 设 A 为 n 阶实方阵，则存在一个正交矩阵 Q 和一个半正定矩阵 B，使得 $A = QB$；当 A 可逆时，该分解中的 Q、B 唯一且 B 为正定，称为 A 的极分解。

正定二次型

证明：[根的唯一性证明] 若 $A=B^k$，其中 B 是正定矩阵。如果 $\lambda\neq\mu$ 为 B 的特征值（均为正数），则 $\lambda^k\neq\mu^k$ 为也 A 的特征值，所以 λ 在 B 中的重数和 λ^k 在 A 中的代数重数相同；显然特征子空间 $E_\lambda^B\subseteq E_{\lambda^k}^A$，由于都可对角化，所以几何重数也相同，于是有 $E_\lambda^B=E_{\lambda^k}^A$。此时若 $A=B_1^k$，则 B 与 B_1 都有相同的特征值，且对每个特征值 λ，$E_\lambda^B=E_\lambda^{B_1}$，所以 $B=\sum_i\lambda_i x_i x_i'=B_1$。 $\square$

正定二次型

证明：[矩阵的极分解存在性] 设 A 为实矩阵，则 $A'A$ 半正定，所以存在正交矩阵 Q_1，使得 $Q_1'A'AQ_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$；
记 $AQ_1 = (P_1, \ldots, P_n)$ 为矩阵的列分块。

$$(AQ_1)'(AQ_1) = \left(\left(P_j, P_i\right)\right)_{n\times n} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$$

可得 $P_i = 0$（$r < i \leq n$）且 $P_1, \ldots, P_r$ 相互正交，$(P_i, P_i) = \lambda_i$（$1 \leq i \leq r$）；故 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}P_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}P_r$ 为单位正交，可扩充为 $\mathbb{R}_n$ 的一组标准正交基 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}P_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}P_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$。记这组基构成的矩阵为 Q_2，则

$$\begin{aligned}
AQ_1 &= (P_1, \ldots, P_r, 0, \ldots, 0) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}P_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}P_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\right)\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \ldots, 0\right) \\
&= Q_2\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \ldots, 0\right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= Q_2\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \ldots, 0\right)Q_1' \\
&= \left(Q_2\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \ldots, 0\right)Q_2'\right)\left(Q_2Q_1'\right) = BQ
\end{aligned}$$