线性方程组应用一：电路计算

Kirchhoff 电流定律： 电路中流入一点的电流与从该点流出的电流之代数和为零。

线性方程组应用一：电路计算

Kirchhoff 电流定律： 电路中流入一点的电流与从该点流出的电流之代数和为零。

Kirchhoff 电压定律： 在电路中的任一回路中，电压降之代数和为零。

线性方程组应用一：电路计算

Kirchhoff 电流定律： 电路中流入一点的电流与从该点流出的电流之代数和为零。

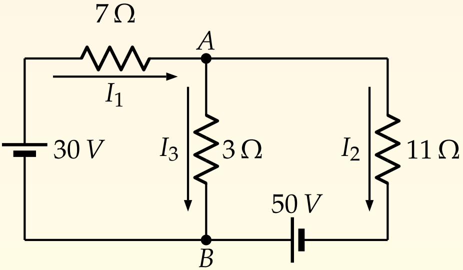
Kirchhoff 电压定律： 在电路中的任一回路中，电压降之代数和为零。

线性方程组应用一：电路计算

Kirchhoff 电流定律： 电路中流入一点的电流与从该点流出的电流之代数和为零。

Kirchhoff 电压定律： 在电路中的任一回路中，电压降之代数和为零。

设有电路，如右图

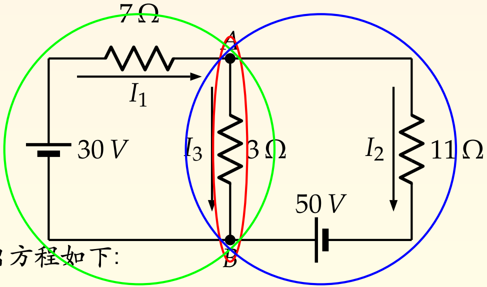


线性方程组应用一：电路计算

Kirchhoff 电流定律： 电路中流入一点的电流与从该点流出的电流之代数和为零。

Kirchhoff 电压定律： 在电路中的任一回路中，电压降之代数和为零。

设有电路，如右图



根据 Kirchhoff 定律，列出方程如下:

$$\begin{array}{rrrrrl}
I_1 & - I_2 & - I_3 & & = 0 & A \text{ 或 } B \text{ 点电流} \\
7I_1 & & + 3I_3 & - 30 & = 0 & \text{左边回路} \\
 & 11I_2 & - 3I_3 & - 50 & = 0 & \text{右边回路}
\end{array}$$

线性方程组应用一：电路计算

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 7I_1 + 3I_3 - 30 = 0 \\ 11I_2 - 3I_3 - 50 = 0 \end{cases}$$

方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & 11 & -3 \end{vmatrix} = -131$，常数列为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$，

由 Cramer 法则：

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 30 & 0 & 3 \\ 50 & 11 & -3 \end{vmatrix}}{-131} = \frac{570}{131}(A);\ I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 30 & 3 \\ 0 & 50 & -3 \end{vmatrix}}{-131} = \frac{590}{131}(A);$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 30 \\ 0 & 11 & 50 \end{vmatrix}}{-131} = -\frac{20}{131}(A)$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

设有一个自产自足的经济体，由三部门构成：M - 机器制造；A - 粮食生产；及 S - 服务部门。如下表，其中每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比。

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

设有一个自产自足的经济体，由三部门构成：M - 机器制造；A - 粮食生产；及 S - 服务部门。如下表，其中每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比。

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

设有一个自产自足的经济体，由三部门构成：M - 机器制造；A - 粮食生产；及 S - 服务部门。如下表，其
中每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比。

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

为了保证这个经济体的可持续发展，该如何给各个部门定价？

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

$$\begin{array}{l} .60p_1 \\ .30p_1 \\ .10p_1 \end{array}$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

$$
\begin{array}{ll}
.60p_1 & .50p_2 \\
.30p_1 & .40p_2 \\
.10p_1 & .10p_2
\end{array}
$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

$$\begin{array}{lll} .60p_1 & .50p_2 & .30p_3 \\ .30p_1 & .40p_2 & .20p_3 \\ .10p_1 & .10p_2 & .50p_3 \end{array}$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

$$\begin{array}{cccc} .60p_1 & + & .50p_2 & .30p_3 \\ .30p_1 & + & .40p_2 & .20p_3 \\ .10p_1 & + & .10p_2 & .50p_3 \end{array}$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

$$
\begin{array}{ccccc}
.60p_1 & + & .50p_2 & + & .30p_3 \\
.30p_1 & + & .40p_2 & + & .20p_3 \\
.10p_1 & + & .10p_2 & + & .50p_3
\end{array}
$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

$$
\begin{array}{ccccccc}
.60p_1 & + & .50p_2 & + & .30p_3 & = \\
.30p_1 & + & .40p_2 & + & .20p_3 & = \\
.10p_1 & + & .10p_2 & & .50p_3 & =
\end{array}
$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.60	.50	.30
A - 粮食生产	.30	.40	.20
S - 服务	.10	.10	.50

每列表示此列所对应部门的产品或服务用于其它部门的百分比

设各部门的年总产值（均折合成货币单位，如可用百万 RMB 为单位）分别为 p_1，p_2，p_3。

Leontief 指出：对每个部门，消耗=产出。故得方程组

$$
\begin{array}{ccccccc}
.60p_1 & + & .50p_2 & + & .30p_3 & = & p_1 \\
.30p_1 & + & .40p_2 & + & .20p_3 & = & p_2 \\
.10p_1 & + & .10p_2 & & .50p_3 & = & p_3
\end{array}
$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 内向型经济模型

可得，$p_1 = 3.1111 p_3, p_2 = 1.8889 p_3$。即如果将服务部门一年的产值定为 1,000,000 的话，机器制造部门的年产值就应定为 3,111,100，而粮食生产的年产值就应定为 1,888,900。

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

对于一个经济体来说，若一个部门的产品（服务）除了供该经济体自用外，还有剩余，则该经济体还可将这一部门的产品（服务）向外部输出。在该外向模型中，价格是固定的。设表如下：其中每列表示相应的部门每生产一个单位的产品所需其它部门的产品量。

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.50	.40	.20
A - 粮食生产	.20	.30	.10
S - 服务	.10	.10	.30

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

对于一个经济体来说，若一个部门的产品（服务）除了供该经济体自用外，还有剩余，则该经济体还可将这一部门的产品（服务）向外部输出。在该外向模型中，价格是固定的。设表如下：其中每列表示相应的部门每生产一个单位的产品所需其它部门的产品量。

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.50	.40	.20
A - 粮食生产	.20	.30	.10
S - 服务	.10	.10	.30

现设外部将该经济体订购 50 单位的制造机械，30 单位的粮食，及 20 单位的服务。问该经济体该如何组织生产？

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.50	.40	.20
A - 粮食生产	.20	.30	.10
S - 服务	.10	.10	.30

每列表示相应的部门每生产一个单位的产品所需其它部门的产品量。

Leontief 规则：

$$\{生产的总量\ \mathbf{x}\} = \{生产中消耗量\} + \{最终需求\ \mathbf{d}\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 50.0 \\ \\ \end{cases}$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.50	.40	.20
A - 粮食生产	.20	.30	.10
S - 服务	.10	.10	.30

每列表示相应的部门每生产一个单位的产品所需其它部门的产品量。

Leontief 规则：

$$\{\text{生产的总量 }\mathbf{x}\} = \{\text{生产中消耗量}\} + \{\text{最终需求 }\mathbf{d}\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 50.0 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 30.0 \\ \end{cases}$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.50	.40	.20
A - 粮食生产	.20	.30	.10
S - 服务	.10	.10	.30

每列表示相应的部门每生产一个单位的产品所需其它部门的产品量。

Leontief 规则：

$$\{\text{生产的总量 } \mathbf{x}\} = \{\text{生产中消耗量}\} + \{\text{最终需求 } \mathbf{d}\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 50.0 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 30.0 \\ x_3 = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 20.0 \end{cases}$$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

	M - 机器制造	A - 粮食生产	S - 服务
M - 机器制造	.50	.40	.20
A - 粮食生产	.20	.30	.10
S - 服务	.10	.10	.30

每列表示相应的部门每生产一个单位的产品所需其它部门的产品量。

Leontief 规则：

$$\{\text{生产的总量 } \mathbf{x}\} = \{\text{生产中消耗量}\} + \{\text{最终需求 } \mathbf{d}\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 50.0 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 30.0 \\ x_3 = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 20.0 \end{cases}$$

解之得 $x_1 = 226$，$x_2 = 119$，$x_3 = 78$。

Leontief 规则： $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

上面两个模型是哈佛教授 Wassily Leontief 在 1949 年前建立的。

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

上面两个模型是哈佛教授 Wassily Leontief 在 1949 年前建立的。当时他将美国的经济划分成了 500 个部门，统计出 $500 \times 500 = 250,000$ 个系数，由于当时最快的计算机 Mark II 不能胜任这样复杂的计算任务，Leontief 又将之简化成有 42 个未知数的 42 个方程构成的方程组。用了几个月的编程，和 56 个小时的计算，Leontief 得到了最终想要的结果。

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

上面两个模型是哈佛教授 Wassily Leontief 在 1949 年前建立的。当时他将美国的经济划分成了 500 个部门，统计出 $500 \times 500 = 250,000$ 个系数，由于当时最快的计算机 Mark II 不能胜任这样复杂的计算任务，Leontief 又将之简化成有 42 个未知数的 42 个方程构成的方程组。用了几个月的编程，和 56 个小时的计算，Leontief 得到了最终想要的结果。

这是历史上第一个应用计算机分析大规模数学模型的成功范例。

线性方程组应用二：经济计划与管理

Leontief 外向型经济模型

上面两个模型是哈佛教授 Wassily Leontief 在 1949 年前建立的。
当时他将美国的经济划分成了 500 个部门，统计出 $500 \times 500 = 250,000$ 个系数，由于当时最快的计算机 Mark II 不能胜任这样复杂的计算任务，Leontief 又将之简化成有 42 个未知数的 42 个方程构成的方程组。用了几个月的编程，和 56 个小时的计算，Leontief 得到了最终想要的结果。
这是历史上第一个应用计算机分析大规模数学模型的成功范例。
因为这项成就，Leontief 在 1973 年被授予 Nobel 经济学奖。

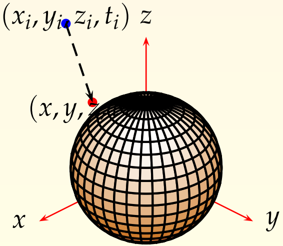
线性方程组应用三：GPS 定位

GPS 是二十世纪发展起来的一项新技术，被广泛地应用于航运、军事、及我们的日常生活之中。在未来战场上，无人机的控制、寻航导弹的制导等都离不开 GPS。当我们开车到达一个陌生的城市时，我们也习惯上打开 GPS 导航仪。甚至一些家长，也使用 GPS 对孩子的活动轨迹进行监控。那么，GPS 究竟是什么？

概括地讲，GPS （ Global Positioning System ） 的硬件是由两部分构成，一部分是天上的 24 颗定位卫星，一部分是地上的接收器。

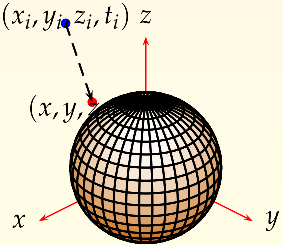
线性方程组应用三：GPS 定位

GPS 是二十世纪发展起来的一项新技术，被广泛地应用于航运、军事、及我们的日常生活之中。在未来战场上，无人机的控制、寻航导弹的制导等都离不开 GPS。当我们开车到达一个陌生的城市时，我们也习惯上打开 GPS 导航仪。甚至一些家长，也使用 GPS 对孩子的活动轨迹进行监控。那么，GPS 究竟是什么？
概括地讲，GPS （ Global Positioning System ）的硬件是由两部分构成，一部分是天上的 24 颗定位卫星，一部分是地上的接收器。



线性方程组应用三：GPS 定位

GPS 是二十世纪发展起来的一项新技术，被广泛地应用于航运、军事、及我们的日常生活之中。在未来战场上，无人机的控制、寻航导弹的制导等都离不开 GPS。当我们开车到达一个陌生的城市时，我们也习惯上打开 GPS 导航仪。甚至一些家长，也使用 GPS 对孩子的活动轨迹进行监控。那么，GPS 究竟是什么？
概括地讲，GPS （ Global Positioning System ）的硬件是由两部分构成，一部分是天上的 24 颗定位卫星，一部分是地上的接收器。



设接收器所在位置坐标为 (x, y, z, t)，信号发出时四颗卫星的坐标分别为 (x_i, y_i, z_i, t_i)，则有方程

$$
\begin{aligned}
& (x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2 \\
= \quad & c\,(t-t_i)^2, \quad i=1,2,3,4.
\end{aligned}
$$

线性方程组应用三：GPS 定位

$$
\begin{cases}
(2x_1-2x_2)\,x+(2y_1-2y_2)\,y+(2z_1-2z_2)\,z \\
=(2ct_2-2ct_1)\,t+\left(ct_1^2-ct_2^2-x_1^2+x_2^2-y_1^2+y_2^2-z_1^2+z_2^2\right) \\
\\
(2x_1-2x_3)\,x+(2y_1-2y_3)\,y+(2z_1-2z_3)\,z+ \\
=-(2ct_3-2ct_1)\,t+ct_1^2-ct_3^2-x_1^2+x_3^2-y_1^2+y_3^2-z_1^2+z_3^2 \\
\\
(2x_1-2x_4)\,x+(2y_1-2y_4)\,y+(2z_1-2z_4)\,z \\
=-(2ct_4-2ct_1)\,t+\left(ct_1^2-ct_4^2-x_1^2-y_1^2+x_4^2-z_1^2+y_4^2+z_4^2\right) \\
\\
\left((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-c\,(t-t_1)^2\right)=0
\end{cases}
$$