[section] [section] [section]

常用数学符号

- 上下标：

例：a_i, b_{ij}, a_{i_j}

- 连加和连乘：

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 通常记作$\sum_{i=1}^n a_i$.
$a_1 a_2 \cdots a_n$ 记作$\prod_{i=1}^n a_i$.

由于这两种记号非常相似，下面只讨论连加号。

请想一想$\sum_{i=1}^n i^3$ 表示什么意思，公式
$(x-y)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n y^n$
如何用Σ 符号表示？

连加号

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

中的i 只起辅助作用，在实际的展开式中并不出现，上面表达式和

$$\sum_{j=1}^n a_j$$

是一样的。因此这个变量i 有时也称“哑”变量（dummy）。

对于多重下标可进行多重求和，如

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

表示

$$\begin{gathered}(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m})\\ +(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2m})\\ +\cdots\\ +(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nm}).\end{gathered}$$

注意

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$$

$$\begin{gathered}(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})\\ +(a_{22}+\cdots+a_{2n})\\ +\cdots\\ +a_{nn}\\ =\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.\end{gathered}$$

有时只对部分下标作连加，这时只要把条件写在Σ 符号下面就可以了。例如：

$$\sum_{i<j} a_{ij},$$

$$\sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

数学证明的几种常见方法

• 分情形讨论。

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

• 数学归纳法。

任何一个大于 1 的自然数可以分解成一些素数的乘积。

• 反证法。

$\sqrt{2}$ 是无理数。

素数有无限多个。

递归

• $n!$ 的值：

$1! = 1$.

当 $n > 1$ 时 $n! = n \cdot (n-1)!$.

• Fibonacci 数列 f_n :

$f_1 = f_2 = 1$.

当 $n > 2$ 时 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

• 设 m 是任意一个给定的自然数。

$a_1 = m$.

当 $n > 1$ 时，如果 a_{n-1} 是偶数则 $a_n = a_{n-1}/2$, 如果 a_{n-1} 是奇数则 $a_n = 3a_{n-1} + 1$.

行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为一个 n 阶行列式 (determinant)。

用递归的方式来定义行列式的值：

当 $n = 1$ 时定义行列式的值为 a_{11}.

设 $n > 1$. 设 $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$. 在行列式中划去第$i$行第 j 列后剩下的元素按原来的顺序构成的 $(n-1)$ 阶行列式称为a_{ij} 的余子式，将它的值记作 M_{ij}. 将 n 阶行列式的值定义为

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1}M_{n1}.$$

记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 称为 a_{ij} 的代数余子式。则上面式子可以写成

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}.$$

行列式通常用一个大写字母表示，一般情况下该字母也代表行列式的值。有时也采用 $A = |a_{ij}|$ 或 $A = |a_{ij}|_{1 \le i,j \le n}$ 这样简单的记号。

- 当 $n=2$ 时行列式的值是 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$.
- 当 $n=3$ 时行列式的值是

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

行列式的性质

形为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式叫做上三角行列式。也就是说$a_{ij} = 0$ 对所有 $i > j$ 成立。下三角行列式也可类似定义。元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 构成行列式的主对角线。

引理0.1. 设 $1 \le k \le n$. 则下三角行列式中 a_{k1} 的余子式仍是下三角行列式。如果 $k > 1$ 则 a_{k1} 的余子式的左上角元素为零。

证明：将a_{k1} 的余子式记作

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} \\ & & \cdots & \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

则

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{i,j+1} & : \quad i < k \\ a_{i+1,j+1} & : \quad i \ge k \end{cases}$$

由于当 $i < j$ 时$a_{i,j+1}$ 和 $a_{i+1,j+1}$ 都等于零，因此只要 $i < j$, 不管 $i < k$ 还是 $i \ge k$, b_{ij} 总是等于零。这说明所讨论的余子式是下三角的。

当 $k > 1$ 时， $b_{11} = a_{12} = 0$. □

性质1）上（下）三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积。

证明：用数学归纳法。

性质2）若行列式的某行或某列中的元素全是零，则行列式的值等于零。

证明：对行列式的阶数 n 进行归纳。当 $n=1$ 时 $a_{11}=0$. 结论成立。假定性质对 $n-1$ 阶行列式成立。

设 n 阶行列式的第 k 列中元素全是零。若 $k=1$. 则行列式的值等于

$$0A_{11}+0A_{21}+\cdots+0A_{n1}=0.$$

若 $k>1$. 则根据归纳假设

$$A_{11}=A_{21}=\cdots=A_{n1}=0.$$

因此行列式的值等于零。

再设 n 阶行列式的第 k 行中元素全是零。则 $a_{k1}=0$ 而根据归纳假设 $A_{i1}=0$ 对所有 $i\neq k$ 成立。因此 $a_{i1}A_{i1}=0$ 对 $1\leq i\leq n$ 成立。所以行列式的值等于零。$\square$

性质3）行列式的某行或某列中所有元素同乘一个常数 c 后的行列式的值等于原行列式的值乘 c.

证明：对阶数归纳。

性质4）对换行列式的两行后的行列式的值等于原行列式的值乘 -1.

证明：当 $n=2$ 通过直接计算得知结论成立。

设 $n>2$. 先假定互相对换的两行相邻，不妨设第 r 行和第 $r+1$ 行对换后的行列式是

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

于是

$$b_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & : \quad i\neq r, i\neq r+1 \\ a_{r+1,j} & : \quad i=r \\ a_{rj} & : \quad i=r+1 \end{cases}.$$

记 N_{ij} 为 B 中 b_{ij} 的余子式的值。则 B 的值等于

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}N_{i1}.$$

当 $i\neq r, i\neq r+1$ 时由归纳假设得 $N_{i1}=-M_{i1}$. 而$N_{r1}=M_{r+1,1}, N_{r+1,1}=M_{r,1}$. 故

$$\begin{aligned}&(-1)^{r+1}b_{r1}N_{r1}+(-1)^{r}b_{r+1,1}N_{r+1,1}\\ &=(-1)^{r+1}a_{r+1,1}M_{r+1,1}+(-1)^{r}a_{r1}M_{r1}\\ &=-[(-1)^{r+1}a_{r1}M_{r1}+(-1)^{r+2}a_{r+1,1}M_{r+1,1}].\end{aligned}$$

即得所需结果。

一般地，设 B 是由原行列式 A 的第 r 行和第 s 行互换而得的行列式，其中 $r < s$.

通过 $s-r-1$ 次相邻行的互换可以分别将 A, B 的第 s 行换至第 $r+1$ 行，所得的行列式分别记作 A_1, B_1. 则

$$B_1 = -A_1.$$

另一方面，

$$B = (-1)^{s-r-1}B_1,$$
$$A = (-1)^{s-r-1}A_1.$$

因此 $B = -A$. □

例0.1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 80.$$

性质5）若行列式的某两行相同，则行列式的值等于零。

证明：根据性质4），$A = -A$, 故 $A = 0$. □

推论：若行列式的某两行成比例，则行列式的值等于零。

性质6）设 $A=|a_{ij}|, B=|b_{ij}|, C=|c_{ij}|$ 是三个 n 阶行列式， $1\leq r\leq n$. 假定 $a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}$ 对所有 $i\neq r$ 和所有 j 成立， $a_{rj}=b_{rj}+c_{rj}$ 对所有 j 成立。则$A=B+C$.

证明：对 n 进行归纳。当 $n=1$ 时结论成立。假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立。

将 A,B,C 的代数余子式分别记作 A_{ij},B_{ij},C_{ij}. 则

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}=a_{r1}A_{r1}+\sum_{i\neq r}a_{i1}A_{i1}$$

$$=(b_{r1}+c_{r1})A_{r1}+\sum_{i\neq r}a_{i1}(B_{i1}+C_{i1})$$

$$=b_{r1}B_{r1}+c_{r1}C_{r1}+\sum_{i\neq r}b_{i1}B_{i1}+\sum_{i\neq r}c_{i1}C_{i1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}b_{i1}B_{i1}+\sum_{i=1}^{n}c_{i1}C_{i1}=B+C.\square$$

性质7）【非常有用】将行列式的某行乘一常数后加入另一行不改变行列式的值。

证明：性质3）5）6）的推论。

例0.2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

性质5’）若行列式的某两列相同，则行列式的值等于零。

证明：当 $n=2$ 时结论显然成立。假定结论对 $n-1$ 阶行列式成立，设$A=|a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式，它的第 r 列和第 s 列相同，$r<s$。分两种情形讨论：

1）$r>1:$

根据归纳假设，$A_{i1}=0$ 对所有 i 成立，故 $A=0.$

2) $r=1:$

如果第一列的所有元素等于零则行列式等于零。下面设第一列元素不全为零，不妨设 $a_{11}\neq 0$。根据性质7）可设 $a_{i1}=0$ 对 $2\leq i\leq n$ 成立，于是 $a_{is}=0$ 对 $2\leq i\leq n$ 成立。因此

$$A=a_{11}A_{11}+\sum_{i=2}^{n}a_{i1}A_{i1}$$

$$=a_{11}\cdot 0+\sum_{i=2}^{n}0\cdot A_{i1}=0.\Box$$

推论：若行列式的某两列成比例，则行列式的值等于零。

性质6’）设 $A=|a_{ij}|, B=|b_{ij}|, C=|c_{ij}|$ 是三个 n 阶行列式， $1\le r\le n$. 假定 $a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}$ 对所有 i 和所有 $j\neq r$ 成立， $a_{ir}=b_{ir}+c_{ir}$ 对所有 i 成立。则$A=B+C$.

证明：对 n 进行归纳。当 $n=1$ 时结论成立。假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立。

对 $r=1$ 和 $r>1$ 进行讨论即可。□

性质7’）将行列式的某列乘一常数后加入另一列不改变行列式的值。

证明：性质3）5’）6’）的推论。

性质4’）对换行列式的两列后的行列式的值等于原行列式的值乘 -1.

证明：将该两列的第二列加入第一列，再从第二列中减去第一列，最后将第二列加入第一列。 $\square$

课堂练习：
计算习题 1.3.1.(2) 中的行列式的值。

作业：
p.22: 2,3,4

行列式按任意列展开

命题0.2. 设 $A=|a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式，$1\le r\le n$。则$A=\sum_{i=1}^{n}a_{ir}A_{ir}$, 其中 A_{ir} 是 a_{ir} 的代数余子式。这个等式叫做行列式 A 按第 r 列的展开。

证明：当 $r=1$ 时这恰好是行列式的定义。以下设 $r>1$.

令 $B_{ij}=|b_{ij}|$ 为将 A 的第1 列和第r 列互换所得的行列式。即

$$b_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & : \quad j\neq 1, j\neq r \\ a_{ir} & : \quad j=1 \\ a_{i1} & : \quad j=r \end{cases}.$$

将 A 中a_{ij} 的余子式记作 M_{ij}. 将 B 中 b_{ij} 的余子式记作N_{ij}. 则

$$A=-B=-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}N_{i1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_{ir}(-1)^{r-2}M_{ir}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{r+i}a_{ir}M_{ir}=\sum_{i=1}^{n}a_{ir}A_{ir}.\Box$$

行列式的一个基本性质

定理0.3. 设 $A=|a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式，$1\leq k,r\leq n$。则

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ir}=\left\{\begin{array}{ccc} A & : & k=r \\ 0 & : & k\neq r \end{array}\right. .$$

证明：$k=r$ 的情形已经讨论过了。下面设 $k\neq r$. 设 B 是将 A 的第 r 列用第 k 列取代后得到的行列式，由于 B 的第 k 列和第r 列相同，$B=0$.

另一方面，利用 B 按第 r 列的展开式得

$$B=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ir}.\square$$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组的系数行列式。

设 $1\le k\le n$. 对于这个固定的 k, 将方程组的第 i 个方程的两边同乘 A_{ik} 后全部相加得方程

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{ik})x_1+\cdots+(\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{ik})x_n=\sum_{i=1}^{n} b_iA_{ik}.$$

因此

$$Ax_k=\sum_{i=1}^{n} b_iA_{ik}.$$

如果 $A\neq 0$, 则方程组的解是

$$x_k=\frac{\sum_{i=1}^{n} b_iA_{ik}}{A}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

这个结果叫做Cramer 法则。

行列式按行展开

引理0.4. 设

$$A=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & & a_{2s} & & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{ns} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

则 $A=a_{1s}A_{1s}$.

证明：按第 s 列展开即得所需等式。□

引理0.5. 设 $A=|a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式，则

$$A=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.$$

证明：

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}.\square$$

定理0.6. 设 $A = |a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式，则

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj}$$

对任意 $1 \leq r \leq n$ 成立。

证明：将第一行和第 r 行对换即可。

行列式的转置

定义0.1. 设 $A=|a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式。作 n 阶行列式 $B=|b_{ij}|$, 其中 $b_{ij}=a_{ji}$. 则 B 称为 A 的转置。

命题0.7. 一个行列式 $A=|a_{ij}|$ 和它的转置具有相同的值。

证明：对阶数 n 进行归纳。当 $n=1$ 时命题显然成立。假定命题对$n-1$ 阶行列式成立。

令 $b_{ij}=a_{ji}, B=|b_{ij}|$. 将 A 中 a_{ij} 的余子式记作M_{ij}. 将 B 中 b_{ij} 的余子式记作 N_{ij}. 对任何 $1\leq j\leq n$, 余子式 N_{1j} 是 M_{j1} 的转置。根据归纳假设，$M_{j1}=N_{1j}$. 因此

$$B=\sum_{j=1}^{n} b_{1j}B_{1j}=\sum_{j=1}^{n} a_{j1}(-1)^{j+1}N_{1j}=$$

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}M_{j1}=A.\square$$

小结

1）

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ir} = \begin{cases} A & : \quad k = r \\ 0 & : \quad k \neq r \end{cases}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{rj} = \begin{cases} A & : \quad k = r \\ 0 & : \quad k \neq r \end{cases}.$$

2）转置不改变行列式的值。

3）对换两行或两列改变正负号。

4）某行或某列乘一常数 c 则行列式也乘 c.

5）某行（或列）乘一常数后加入另一行（或列）不改变行列式的值。

6）某行（或列）为零则行列式等于零。

7) 加法分配律对某行或某列成立。

课堂练习：
p.33:
1(1),(2)

行列式的计算

例0.3. (Vandermonde)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ & & & \cdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解：

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ & & & \cdots & \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ & & & \cdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

例0.4.

$$A_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ & & & \cdots & \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解法一：把第2至第 n 行加入第1行得

$$A_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ & & \cdots & \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ & & & \cdots & \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ a & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法二：

从第2至第n 行中分别减去第一行得

$$A_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

再把第2至第 n 列加入第1列得

$$A_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

作业：
p.25: 3,4
p.33:2,3,4,6

行列式的传统定义

如果 $k_1, \ldots, k_n$ 是自然数 $1, 2, \ldots, n$ 的一个重新排列，则称$(k_1, \ldots, k_n)$ 为 $1, 2, \ldots, n$ 的一个置换。例如 $(3, 1, 2)$ 是$1, 2, 3$ 的一个置换。

对于固定的 n, 由 $1, 2, \ldots, n$ 的所有置换构成的集合记作 S_n. 例如 S_3 是由六个元素

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$$

构成的集合。

设 $(k_1, \ldots, k_n) \in S_n$. 如果有一对指标 $i < j$ 满足 $k_i > k_j$, 则称 (k_i, k_j) 是 $(k_1, \ldots, k_n)$ 的一个逆序。记$N(k_1, \ldots, k_n)$ 为 $(k_1, \ldots, k_n)$ 的逆序个数。

例如: $(n = 4)$

$$N(1, 2, 3, 4) = 0,$$

$$N(4, 2, 3, 1) = 5.$$

定理0.8. 设 $A = |a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式。则

$$A = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,\ldots,k_n)} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n}.$$

证明：对 n 进行归纳。当 $n = 1$ 时显然成立。假定 $n > 1$ 且定理对$n-1$ 阶行列式成立。

对每个 $1 \le i \le n$ 作 S_n 的子集

$$T_i = \{(k_1,\ldots,k_n) \in S_n | k_1 = i\}.$$

则 $T_1,\ldots,T_n$ 两两不交且 $S_n = T_1 \cup \cdots \cup T_n$.

因此

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,\ldots,k_n)} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in T_i} (-1)^{N(k_1,\ldots,k_n)} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in T_i} (-1)^{i-1} (-1)^{N(k_2,\ldots,k_n)} a_{i,1} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i,1} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in T_i} (-1)^{N(k_2,\ldots,k_n)} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n}.$$

由归纳假设得知

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in T_i} (-1)^{N(k_2,\ldots,k_n)} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n}$$

等于 A 中a_{i1} 的余子式 M_{i1}. 代入上式即可。 □

大规模练习

从行列式的传统定义推出行列式的所有性质。(即习题 1.6.3)

先证转置不改变行列式的值。

设 $A=|a_{ij}|$, 则 $A'=|b_{ij}|$, 其中 $b_{ij}=a_{ji}$.

$$\begin{aligned} A' &= \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,\ldots,k_n)} b_{k_1,1}b_{k_2,2}\cdots b_{k_n,n} \\ &= \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,\ldots,k_n)} a_{1,k_1}a_{2,k_2}\cdots a_{n,k_n}. \end{aligned}$$

将排列 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 看成集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 到自身中的映射 $\sigma(i)=k_i$. 则 σ 是一一对应。它的逆映射 σ^{-1} 存在。容易看出

- $N(\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n))=N(\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(2),\ldots,\sigma^{-1}(n))$.
- $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}=a_{\sigma^{-1}(1),1}a_{\sigma^{-1}(2),2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n),n}$.

故

$$A'=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{N(k_1,\ldots,k_n)}a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{N(\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(2),\ldots,\sigma^{-1}(n))}a_{\sigma^{-1}(1),1}a_{\sigma^{-1}(2),2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n),n}=A.$$

- 某行等于零则行列式等于零
- 对换两行改变行列式的符号
- 对每个行线性
- 上三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积

Laplace 展开

设 $A = |a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式。设 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$.

将 A 的 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 行之外的行及 $j_1, j_2, \ldots, j_k$ 列之外的列划去后得到的 k 阶行列式记为

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

将 A 的 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 行及 $j_1, j_2, \ldots, j_k$ 划去后得到的 $n-k$ 阶行列式记为

$$M\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

例0.5. 设

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

则

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

称为代数余子式。

定理0.9. (Laplace) 对任何 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 等式

$$A = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \widehat{A}\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

成立。

证明略。

[注] 当 $k = 1$ 时，Laplace 展开式就是按某行（或某列）展开。

例0.6.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 = 24.$$

课堂练习：
计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

例0.7. 求证 n 阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} \cos(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos(x) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos(x) & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos(x) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos(x) \end{vmatrix}$$

的值是 $\cos(nx)$.

证明：对 n 进行归纳。当 $n = 1, 2$ 时直接验证等式成立。设 $n > 2$ 且$A_{n-2} = \cos[(n-2)x], A_{n-1} = \cos[(n-1)x]$.

按 A_n 最后一行展开得

$$A_n = 2\cos(x)A_{n-1} - A_{n-2} = 2\cos(x)\cos[(n-1)x] - \cos[(n-2)x]$$

$$= 2\cos(x)\cos[(n-1)x] - \cos[(n-1)x - x]$$

$$= 2\cos(x)\cos[(n-1)x] - \cos[(n-1)x]\cos(x) - \sin[(n-1)x]\sin(x)$$

$$= \cos[(n-1)x]\cos(x) - \sin[(n-1)x]\sin(x)$$

$$= \cos(nx). \square$$

作业：
p.37:4,7
p.44:2,4,5